이공계 학생을 위한

수학의 기초

-연습문제 해답-

연습문제 (1.1)

1. (a). X (b). O (c). O (d). X (e). O
2. $x \in A \Rightarrow x = 2p, p \in N \Rightarrow x$는 짝수 $\Rightarrow x \in B$
3. $A = B = \{1\}$와 $A = B = \varnothing$를 이용
4. $nC_0 + nC_1 + \cdots + nC_k + \cdots + nC_n = (1+1)^n = 2^n$
5. (a) $\triangle x = -1$, $\triangle y = -1$ (b) $\triangle x = 2$, $\triangle y = -2$ (c) $\triangle x = 1 - \sqrt{2}$, $\triangle y = \sqrt{2} - 1$
   (d) $\triangle x = 1 + \sqrt{2}$, $\triangle y = 0$ (e) $\triangle x = -12$, $\triangle y = -2$ (f) $\triangle x = -9$, $\triangle y = 21$
6. $y = \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-1) - 1$
7. $y = mx + 1 - m \, (m \in R)$와 $x = 1$
8. $y = -2x + 3$
9. $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{7}{4}$
10. 도형위의 임의의 네 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ 에 대하여 다음의 연립방정식을 얻는다.
    $Ax_1 + By_1 + C = 0$, $Ax_2 + By_2 + C = 0$, $Ax_3 + By_3 + C = 0$, $Ax_4 + By_4 + C = 0$
    이 식을 이용하여 증분의 비가 일정함을 보인다.
11. 직선위의 세 점 $(-1,1)$, $(0, 0)$, $(1,1)$을 선택하여 증분의 비가 일정하지 않음을 보인다.
12. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 16$
13. $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 13$
14. $y = x$
15. 두 원의 중심과의 거리와 각각 반지름의 합을 비교하거나 두원의 교점을 구하여 증명한다.
16. 주어진 방정식을 원의 방정식의 표준형으로 적절히 변형한다.
17. $x^2 = 16y$
18. $(y-2)^2 = 4x$
19. (a) 초점은 $(0, -\dfrac{1}{4})$, 준선은 $y = \dfrac{1}{4}$ (b) 초점은 $(\dfrac{1}{28}, 0)$, 준선은 $x = -\dfrac{1}{28}$
20. 임의의 원소 $x \in X$에 대하여 $f(x) = y$라고 하면 역함수의 정의에 의하여 $f^{-1}(y) = x$이다. 그러므로 $(f^{-1}of)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x = 1_X(x)$. 그런데 $f^{-1}of$와 1_X의 정의역과 공역은 X이므로 $f^{-1}of = 1_X$가 성립한다. 한편 임의의 $y \in Y$에 대하여 f는 전단사함수이므로 $f(x) = y$를 만족하는 유일한 $x \in X$가 존재한다. 그러면 정의에 의하여 $f^{-1}(y) = x$이므로 $(fof^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y = 1_Y(y)$가 성립한다. 그런데 fof^{-1}와 1_Y의 정의역과 공역은 Y이므로 $fof^{-1} = 1_Y$가 성립한다.
21. $f(x,y) = 0$를 만족하는 임의의 (x, y)에 대하여 $f(y,x) = 0$가 항상 성립하는 것이다. 증명은 (x, y)와 (y, x)가 $y = x$에 관하여 대칭인 점이라는 것을 이용한다. 또한 그래프가 $y = -x$에 대하여 대칭이 될 필요충분조건은 $f(x,y) = 0$를 만족하는 임의의 (x, y)에 대하여 $f(-y, -x) = 0$가 항상 성립하는 것이다. 증명은 (x, y)와 $(-y, -x)$가 $y = -x$에 관하여 대칭이라는 사실을 이용한다.

22. (1) $x^2-1+\dfrac{x}{x+1}$ (2) $(x^2-1)\dfrac{x}{x+1}=x(x-1)$ (3) $\dfrac{(x^2-1)(x+1)}{x}$

(4) $\dfrac{-2x-1}{(x+1)^2}$ (5) $\dfrac{x^2-1}{x^2}$

23. (1) f와 g가 우함수이면 $(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=(f+g)(x)$

(2) f와 g가 기함수이면 $(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-(f+g)(x)$

(3) f와 g가 우함수이면 $(fog)(-x)=f(g(-x))=f(g(x))=(fog)(x)$

(4) f가 우함수 g가 기함수이면$(fog)(-x)=f(g(-x))=f(-g(x))=f(g(x))=(fog)(x)$

(5) f가 기함수 g가 우함수이면 $(fog)(-x)=f(g(-x))=f(g(x))=(fog)(x)$

(6) f와 g가 기함수이면 $(fog)(-x)=f(g(-x))=f(-g(x))=-f(g(x))=-(fog)(x)$

24. $(f\circ g)(a)=(f\circ g)(b)\Rightarrow f(g(a))=f(g(b))\xrightarrow{f\text{가 단사}}g(a)=g(b)\xrightarrow{g\text{가 단사}}a=b$. 그러므로 $f\circ g$는 단사함수이다. 전사를 증명하기 위하여 $c\in Z$를 임의의 원소라고 하면 f가 전사함수이므로 $f(b)=c$인 $b\in Y$가 존재한다. 이러한 $b\in Y$에 대하여 g가 전사함수이므로 $g(a)=b$를 만족하는 $a\in X$가 존재한다.

그러므로 $(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(b)=c$가 되어 전사임이 증명된다.

25. (1) f가 전사임을 증명하기 위하여 f의 공역 X의 임의의 원소를 $x\in X$라고 하면 가정에 의하여 $(f\circ g)(x)=1_X(x)=x$를 얻는다. 그러면 $f(g(x))=x$이고 $g(x)\in Y=D(f)$이므로 f는 전사함수이다. 한편 g가 단사함수인 것은 다음과 같이 증명된다.

$$g(a)=g(b)\Rightarrow f(g(a))=f(g(b))\Rightarrow (f\circ g)(a)=(f\circ g)(b)\Rightarrow a=b$$

26. $\delta=\sqrt{1.3}-1$

연습문제 (1.2)

1. (1) 0 (2) -5 (3) 8 (4) -16

2. (1) $-\dfrac{3}{4}$ (2) 2 (3) 1 (4) 1 (5) $\dfrac{1}{2}$ (6) $\dfrac{3}{4}$ (7) $-\dfrac{1}{2}$ (8) $\dfrac{1}{2}$

3. $\lim_{x\to-1+}f(x)=1$. $\lim_{x\to-1-}f(x)$는 없다. $\lim_{x\to0+}f(x)=0$. $\lim_{x\to0-}f(x)=0$. $\lim_{x\to1+}f(x)$는 없다. $\lim_{x\to1-}f(x)=1$

4. (1) 0 (2) 0 (3) 0

5. (1) 1 (2) 5 (3) -6 (4) 0 (5) $-\dfrac{3}{2}$ (6) 13 (7) $=25$

6. 1

7. (1) 1 (2) 0 (3) 0 (4) $\dfrac{1}{2}$.

연습문제 (1.3)

1. $f(1)=\dfrac{3}{2}$

2. 모든 정수의 집합 Z

3. $a=-\frac{1}{2}$

4. 연속함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)>0$, $f(b)<0$인 두 점 a, b가 존재한다고 가정하면 중간값의 정리에 의하여 $f(c)=0$을 만족하는 c가 a와 b사이에 존재하여야 한다. 그러므로 모든 점에서 0이 아닌 함수는 항상 양수이거나 항상 음수이다.

5. 임의의 폐구간을 $[a, b]$라고 하면, 함수 $f(x)$는 폐구간 $[a, b]$에서 연속이므로 극치의 정리에 의하여 최소값 $f(x_m)$과 최대값 $f(x_M)$이 존재한다. 그러면 $f(x_m)<C<f(x_M)$를 만족하는 임의의 실수 C에 대하여 $f(x_0)=C$를 만족하는 x_0가 x_m과 x_M 사이에 존재한다. 그러므로 $f([a,b])=[f(x_m),\ f(x_M)]$이다.

6. $f(1)=0$ 7. $f(n)=\frac{1}{1+n^2}$ 8. $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+x^2-4x+1$에 중간값정리를 적용

연습문제 (2.2)

1. (1) 3.2 (2) $-\frac{1}{1.1}$

2. (1) $2x+1$ (2) $-\frac{2}{x^3}$ (3) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

3. (1) 연속 (2) 미분불가능

4. (1) $f'(c+)=\lim_{x\to c+} f'(x)$ (2) $f'(c-)=\lim_{x\to c-} f'(x)$

   (3) $f_+'(c)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$ (4) $f_-'(c)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$

5. $f_-'(1+)=2$, $f_+'(1-)=2$

6. (1) $2x-\frac{1}{x^2}$ (2) $-\frac{6x}{(x^2+1)^4}$ (3) $2\frac{x^5-6x^4+10x^3+3x^2-11x+7}{[1+(x-2)^2]^2}$

7. (1) $2x+1$ (2) $30x(x^2+x-1)(x+1)$

   (3) $2\frac{x^3-9x^2+9x-3}{(x^2-x)^3}$

8. 5・(5!).

연습문제 (2.3)

1. $$\frac{d}{dx}\cos x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(-2)\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(-1)\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(-)\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}=-\sin x$$

2. (1) $6\cos 2x(1+\sin 2x)^2$ (2) $2(1+\tan x)\sec^2 x-1$

   (3) $-3\csc^3 x\cot x$ (4) $-\sec^2 x\sin(\tan x)\cos[\cos(\tan x)]$

3. (1) $\frac{1}{2\sqrt{\sin^{-1}x}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $\frac{1}{1+\cos^{-1}x}\frac{1}{2\sqrt{\cos^{-1}x}}(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$ 4. $y=\frac{2}{5}(x-1)+\tan^{-1}2$

5. 각 θ의 직각삼각형을 이용하여 증명 : $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\theta+(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{\pi}{2}$ 6. $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

연습문제 (2.5)

1. (1) $\frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}$ (2) $\frac{\cos x-ye^{xy}-e^x}{xe^{xy}+e^y}$

2. (1) $2x\sec^2[\tanh(x^2+1)]\operatorname{sech}^2(x^2+1)$ (2) $-(x+y)^2$

연습문제 (2.6)

1. (1) $y=\frac{x^2}{(1-x)^2}$ (2) $y=\frac{2x}{1-x^2}$ (3) $y=e^x-1$ (4) $y=2-x^2$ $(-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2})$

2. (1) $x=\cos^{\frac{2}{3}}t,\ y=\sin^{\frac{2}{3}}t$

(2) $x=2t\pm\sqrt{4t^2-t^3}$, $y=t$ 또는 $x=8\sin^2\frac{t}{2}+4\sin\frac{t}{2}\sin t y=4\sin^2\frac{t}{2}$ ($y>0$인 경우)

$x=4(\cosh t-1)+2\sqrt{2\cosh t-2}\sinh t,\quad y=2-2\cosh t$ ($y<0$인 경우).

3. (1) $y'=\frac{1+3t^2}{2t^3}$ (2) $y'=-\tan\theta$

4. (1) $y=\frac{1}{2}$(2) $y=-x+\frac{1}{\sqrt{2}}$

5. $x=2\cos t,\ y=2+3\sin t$ 또는 $x=2\sin t,\ y=2+3\cos t$.

6. $x=\cos t, y=\sin t(0\leqq t\leqq 2\pi)$와 $x=\cos 2t, y=\sin 2t(0\leqq t\leqq 2\pi)$는 중심이 원점이고 반지름이 1인 단위원으로 같은 그래프를 갖지만, t가 정의된 구간에서 움직일 때 전자는 원을 한번만 그리지만 후자는 원을 두 바퀴 돈다. 따라서 그래프는 같지만 그리는 도형의 길이는 다르다고 볼 수 있다. 7. $y'=-\frac{3t}{2}$ $y''=-\frac{3}{4t}$

연습문제 (3.1)

1. $v(\frac{\pi}{4})=6,\ a=12$

2. $t=2$인 순간, $f'(2)=16+\cos 2,\quad g'(2)=14+\cos 2$

연습문제 (3.2)

1. 접선 $y=2x$ 법선 $y=-\frac{1}{2}x$

2. 접선 $y=2x-1$, 법선 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 이등분선 $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$, $y=-3x+4$

3. $x_1=\dfrac{1}{3}$, $x_2=\dfrac{25}{72}$, $x_3=\dfrac{108791}{328248}\approx 0.33$

4. 최소값 $-\dfrac{32}{3}$, 최대값 $\dfrac{32}{3}$

5. $x=\dfrac{2(2k)-1}{2}\pi$와 $x=\dfrac{-2(2k-1)-1}{2}\pi$ 에서 극소, $x=\dfrac{2(2k-1)-1}{2}\pi$와 $x=\dfrac{-2(2k)-1}{2}\pi$에서 극대

6. $(\dfrac{1-\sqrt{7}}{3},\ f(\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}))$와 $(\dfrac{1+\sqrt{7}}{3},\ f(\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}))$

7. $y=\tan^{-1}x$에 평균값정리 적용.

8. $f(x,y)=0 \Rightarrow f(\dfrac{1}{5}(-3x+4y+4),\ \dfrac{1}{5}(4x+3y-2))=0$

9. $y=2x+5$는 사점근선, $x=3$은 수직점근선

10. 꼭지점 $(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2})$일 때 4

11. (a) $-\dfrac{1}{3}$ (b) 0 (c) 0 (d) 1 (e) 1 (f) ∞ (g) 0 (h) -2

12. (a) 1 (b) e (c) e^{-2} (d) e (e) 1

13. (1) $r^2=\dfrac{8}{\sin 2\theta}$ (b) $r=\dfrac{4p\cos\theta}{\sin^2\theta}$ (c) $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$. (d) $3(x-2)^2+4y^2=48$

14. $(2,\dfrac{\pi}{6})$, $(2,\dfrac{7\pi}{6})$, $(2,\dfrac{5\pi}{6})$, $(2,\dfrac{11\pi}{6})$, $(2,\dfrac{4\pi}{3})$, $(2,\dfrac{\pi}{3})$, $(2,\dfrac{5\pi}{3})$, $(2,\dfrac{2\pi}{3})$

연습문제 (4.1)

(1) xe^x-e^x+C (2) $\dfrac{1}{5}xe^{5x+\pi}-\dfrac{1}{25}e^{5x+\pi}+C$ (3) $=x\tan^{-1}x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

(4) $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C$ (5) $\ln|x|-\ln|x+1|+C$ (6) $\dfrac{2}{3}(\ln|x|-\ln|x+3|)+C$

(7) $\dfrac{3}{2}(\ln|x-1|-\ln|x+1|)+C$ (8) $\dfrac{5}{6}(\ln|x|-\ln|x+3|)+C$

(9) $(-2\ln|x-1|+3\ln|x+4|+C$ (10) $(-\dfrac{3}{7}ln|x-4|+\dfrac{10}{7}\ln|x+3|+C$

(11) $(-\ln|x-2|+4\ln|x+5|+C$ (12) $(-2\ln|x-\pi|+3\ln|x-2\pi|+C$

(13) $(2\ln|2x-1|-\ln|x+5|+C$ (14) $2x-\dfrac{14}{5}ln|x-2|-\dfrac{1}{5}\ln|x+3|+C$

(15) $\dfrac{5}{3}ln|3x-2|+4\ln|x+1|+C$ (16) $\dfrac{1}{4-\pi}ln|x-4|+\dfrac{\pi-5}{4-\pi}\ln|x-\pi|+C$

연습문제 (5.2)

1. 15	2. 91	3. $\dfrac{481}{280}$	4. 271	5. $\dfrac{85}{2}$
6. $-\dfrac{1154}{105}$	7. 3	8. 3	9. $\sum_{k=1}^{41}k$	10. $\sum_{k=1}^{25}(2k)$

11. $\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k}$ 12. $\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k!}$ 13. $\sum_{k=1}^{50}a_{2k-1}$ 14. $\sum_{k=1}^{502}b_{2k-3}$ 15. $\sum_{k=1}^{n}f(c_k)$

16. $\sum_{k=1}^{n}f(w_k)\Delta x$ 17. 90 18. 220 19. -10 20. -65

21. $\frac{40}{41}$ 22. 1023 23. $-\frac{16}{147}$ 24. $a_{m+1}-a_2$ 25. 14950

26. 1455 27. 2640 28. 22825

29. $\sum_{i=1}^{n}(2i^2-3i+1)=2\sum_{i=1}^{n}i^2-3\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}1=2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-3\frac{n(n+1)}{2}+n=$
$\frac{n(4n+1)(n-1)}{6}$

30. $\frac{n(4n^2-12n+11)}{3}$ 31. $\sum_{k=1}^{17}k(k+2)$ 32. $\sum_{i=1}^{10}(i+4)2^i$

33. $\sum_{i=1}^{11}\frac{i-1}{i}$ 34. $\sum_{i=1}^{10}i\sin\frac{\pi}{i}$ 35. $\frac{33}{5}$

36. $S=a+ar+ar^2+\cdots+ar^n$이라고 하면 $rS=ar+ar^2+\cdots+ar^{n+1}$이므로
$(1-r)S=a-ar^{n+1}=a(1-r^{n+1})$를 얻는다.
$r\neq 1$이므로 양변에 $1-r$을 나누면 $S=a\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$이 된다.

37. (a) $\frac{1023}{1024}$ (b) 2046

38. $S=1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n$과 $S=n+(n-2)+\cdots+2+1$의 양변을 더하면 $2S=(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)=n(n+1)$이므로 양변을 2로 나누면 증명된다.

39. $\sum_{k=0}^{n}(a+kd)=a+(a+d)+\cdots+(a+nd)$, $\sum_{k=0}^{n}(a+kd)=(a+nd)+(a+(n-1)d)+\cdots+a$로

부터 $2\sum_{k=0}^{n}(a+kd)=[2a+nd]+[2a+nd]+\cdots+[2a+nd]=(n+1)[2a+nd]$를 얻으므로

양변을 2로 나누면 $\sum_{k=0}^{n}(a+kd)=\frac{1}{2}(n+1)[2a+nd]$가 된다.

40. $k=1,2,\cdots,n$에 대하여 $\sqrt{k}\leqq\sqrt{n}$, 즉 $\frac{1}{\sqrt{k}}\geqq\frac{1}{\sqrt{n}}$이 성립하므로 다음과 같이 증명

된다. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\geqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}=n\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$

41. $\overline{x}=\frac{55}{7}$, $s^2=\frac{608}{49}$

42. (a) $\overline{x}=1$, $s^2=0$ (b) $\overline{x}=1001$, $s^2=0$ (c) $\overline{x}=2$, $s^2=\frac{2}{3}$ (d) $\overline{x}=10^5+2$, $s^2=\frac{2}{3}$

43. (a) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\overline{x}=n\overline{x}-n(\overline{x})=0$ (b) $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_i\overline{x}$

$+(\overline{x})^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2x_i\overline{x} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2) - \frac{2\overline{x}}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i + (\overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}$

$(x_i^2) - 2(\overline{x})^2 + (\overline{x})^2 = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}x_i^2) - (\overline{x})^2$

44. 같은 수 n개 $a, a, \cdots, a$에 대하여 $\overline{x} = \frac{1}{n}(a+a+\cdots+a) = a$,

$s^2 = \frac{1}{n}[(a-a)^2 + (a-a)^2 + \cdots + (a-a)^2] = 0$

45. $c = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

46. $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n}(x_iy_i - \overline{x}y_i - x_i\overline{y} + \overline{x}\ \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \sum_{i=1}^{n}\overline{x}y_i - \sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y} + \sum_{i=1}^{n}\overline{x}\ \overline{y} = \sum_{i=1}^{n}$

$x_iy_i - \overline{x}\sum_{i=1}^{n}y_i - \overline{y}\sum_{i=1}^{n}x_i + \sum_{i=1}^{n}\overline{x}\ \overline{y} = \sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \overline{x}\,n\overline{y} - \overline{y}\,n\overline{x} + n\overline{x}\ \overline{y} = \sum_{i=1}^{n}x_iy_i - n\overline{x}\ \overline{y}$

47. $(i+1)^4 - i^4 = 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1$의 양변을 $i=1$에서 $i=n$까지 합하고 $\sum_{i=1}^{n}i^3$에 대하여 풀면 된다.

48. $(i+1)^5 - i^5 = 5i^4 + 10i^3 + 10i^2 + 5i + 1$의 양변을 $i=1$에서 $i=n$까지 합하고 $\sum_{i=1}^{n}i^4$에 대하여 풀면 된다.

49. 왼쪽 그림에서 검게 칠해진 부분의 넓이는 전체 사각형의 넓이의 $\frac{1}{2}$임을 알 수 있다. 전체 사각형은 가로눈금이 n, 세로 눈금이 $n+1$이므로 그 넓이는 $n(n+1)$이 된다. 그러므로 공식1이 증명된다. 한 편 오른쪽 그림에서는 그림과 같은 방법으로 칠해 가면 가로와 세로의 눈금의 수가 $1+2+3+\cdots+n$이 되는 정사각형의 모든 눈금이 한 번씩 모두 칠해지므로 칠해진 작은 정사각형의 수는 $(1+2+3+\cdots+n)^2$, 즉, $[\frac{n(n+1)}{2}]^2$이 된다. 따라서 공식3이 증명된다.

50. (a) 364(개) (b) $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

51. (1) $\sum_{i=1}^{10}i(6+i) = 715$ (2) $\sum_{i=1}^{50}i(10+i) = 55{,}675$ (3) $\frac{1}{6}m(m+1)(3n-m+1)$

연습문제 (5.4)

1. $\frac{7}{2}$ 2. $\frac{15}{4}$ 3. $\frac{9}{2}$ 4. $\frac{17}{4}$ 5. $\frac{23}{8}$

6. $\frac{31}{8}$ 7. 6 8. $\frac{31}{2}$ 9. $\frac{1243}{216}$ 10. $\frac{582}{125}$

11. $\frac{5}{2}$ 12. $\frac{7}{6}$ 13. 4

14. n이 홀수일 때와 짝수일 때로 나누어서 계산한다. 값은 $\frac{16}{3}$

15. $\frac{1}{4}$ 16. $\frac{3}{4}$

연습문제 (5.5)

1. 9, $\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6=9$ 2. 3, $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3$ 3. $\frac{32}{3}$ 4. 16 5. 12

6. 4 7. $\frac{81}{4}$ 8. $\frac{4}{3}$ 9. $\frac{48}{5}\sqrt{2}$ 10. $\frac{63}{4}$

11. $\frac{35}{3}$ 12. 4 13. $\frac{21}{2}$ 14. $\frac{62}{3}$ 15. $\frac{26}{3}$

16. 2 17. 33 18. 18 19. $\frac{26}{3}$ 20. 2 21. $\frac{4}{9}$

22. n이 양의 정수이면 x^n의 부정적분은 $\frac{x^{n+1}}{n+1}$이므로 성립한다. 그러나 n이 -1보다 작은 음의 정수이면 x^n은 구간 $[-1,1]$에서 유계함수가 아니므로 적분학의 기본정리를 적용할 수 없다.

23. $\frac{2}{3}$ 24. 4 25. 1 26. $\frac{14}{3}$ 27. $\frac{13}{3}$ 28. 9

29. $\frac{5}{48a^2}$ 30. $(\sqrt{5}-1)b$ 31. $\frac{1}{6}$ 32. $\frac{9}{2}$ 33. $\frac{a^4}{4}$

34. $\frac{1023}{10}$ 35. $\frac{1}{6}b^2$ 36. $\frac{2}{15}$ 37. $\frac{1}{30}$ 38. $\frac{29}{6}$

39. $\frac{1}{2}$ 40. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ 41. 3 42. 1

연습문제 (5.6)

1. 4 2. $\frac{33}{5}$ 3. 15 4. 22 5. $\frac{3}{4}$ 6. $\frac{8}{9}$ 7. $\frac{16}{3}$

8. $\frac{45}{4}$ 9. $\frac{1783}{96}$ 10. 15 11. 1 12. $\sqrt{3}$ 13. $\frac{22}{5}$ 14. $-\frac{15}{14}$

15. $\frac{2047}{11}$ 16. $\frac{2}{3}$ 17. $\frac{2}{3}$ 18. $\frac{52}{3}$ 19. $\frac{122}{9}$ 20. 2 21. 0

22. $\frac{8}{3}$ 23. $\frac{1}{3}$ 24. $-\frac{1}{9}$ 25. $\frac{\pi^2}{4}+1$ 26. $\frac{\pi^2}{2}+1$ 27. 14

28. $-\frac{81}{8}$ 29. $\frac{38}{15}$ 30. $-\frac{49}{20}a^2$ 31. $\frac{x^4-1}{4}$

32. $x<0$이면 0. $x\geqq 0$이면 x^2.

33. 40 34. $\frac{1}{3}$ 35. $\frac{17}{6}$ 36. $\frac{4}{5}$ 37. 0 38. $\frac{2}{3\pi}$

39. $c=\frac{115}{81}$ 40. $c=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 41. $c=1$ 42. $c=\pm 1$ 43. 9

44. 4 45. 2 46. $\frac{20}{3}$

연습문제 (5.7)

1. $\frac{1}{18}$　　2. ∞　　3. e　　4. 1　　5. $\pm\frac{\pi}{2}a^2$($a \geqq 0$이면 +, $a<0$이면 −)

6. 1　　7. ∞　　8. $\frac{\pi}{2a^3}$　　9. $\frac{1}{2}$　　10. ∞

11. ∞　　12. ∞　　13. ∞　　14. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{3}ln2$　　15. π

16. $\frac{\pi}{2a^3}$　　17. ∞　　18. 0　　19. $2\sqrt{a}$　　20. ∞

21. -1　　22. $-\infty$　　23. ∞　　24. ∞　　25. $3\cdot 2^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}$

26. 2　　27. π　　28. π　　29. 없다.　　30. $\frac{\pi}{2a}$

31. $\frac{1}{a^2}$　　32. π　　33. ∞　　34. ∞　　35. $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$

36. $-\frac{\pi}{6}$　　37. 발산　　38. 발산　　39. π　　40. $\frac{\pi}{4}$

41. (**비교판정법**) 구간 $[a,\infty]$에 속하는 임의의 x에 대하여 $0 \leqq f(x) \leqq g(x)$가 성립한다고 하고, 이상적분 $\int_a^\infty g(x)\,dx = A \in R$이 존재한다고 가정하면 분명히 $0 \leqq A < \infty$를 만족한다. 이제 함수 $f(x)$가 임의의 유한한 구간 $[a,\ b]$ (단, $b \geqq a$)에서 적분가능하다고 가정하면-실제로 이 문제는 $f(x)$가 $[a,\infty)$에서 연속이거나 임의의 $[a,\ b]$ (단, $b \geqq a$)에서 적분가능하여야 성립한다.-임의의 실수 $b \geqq a$에 대하여 다음을 만족을 만족한다.

(1) $0 \leqq \int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx \leqq \int_a^\infty g(x)dx = A$

(2) $b_1 < b_2$이면 $\int_a^{b_1} f(x)\,dx \leqq \int_a^{b_2} f(x)\,dx$.

특히 $n \geqq a$를 만족하는 임의의 자연수 n에 대하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$0 \leqq \int_a^n f(x)\,dx \leqq \int_a^{n+1} f(x)\,dx \leqq A$$

그러므로 수열 $\left\{\int_a^n f(x)\,dx\right\}$은 위로 유계인 증가수열이다. 따라서 수열에 대한 단조수렴정리에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\int_a^n f(x)\,dx = B$가 존재한다. 즉, 주어진 임의의 양수 $\epsilon > 0$에 대하여 적당한 양수 $K>0$가 존재하여 $n>K$를 만족하는 임의의 자연수 n에 대하여 다음이 성립한다.

$$|\int_a^n f(x)\,dx - B| < \epsilon,\ \text{즉},\ -\epsilon < \int_a^n f(x)\,dx - B \leqq 0 < \epsilon$$

그러면 단조성에 의하여 임의의 실수 $b > K+1$에 대하여, $[b] > K$이고 $b \geqq [b]$이므로, 다음이 성립한다.

$-\epsilon < \int_a^{[b]} f(x)\,dx - B \leqq \int_a^b f(x)dx - B \leqq 0 < \epsilon$. (단, $[b]$는 b를 넘지않는 최대의 정수)

즉, $b > K+1$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - B\right| < \epsilon.$$

따라서 극한의 정의에 의하여 $\int_a^\infty f(x)dx = B$가 되어 이상적분가능하다.

한편, 유한구간에서의 비교판정법도 위와 유사하게 증명이 된다.
구간 $[a,b)$에 속하는 임의의 x에 대하여 $0 \leqq f(x) \leqq g(x)$가 성립한다고 하고, 이상적분 $\int_a^b g(x)\,dx = A \in R$이 존재한다고 가정하면 분명히 $0 \leqq A < \infty$를 만족한다. 이제 함수 $f(x)$가 임의의 구간 $[a,\ c]$ (단, $c < b$)에서 적분가능하다고 가정하면 임의의 실수 $c < b$에 대하여 다음을 만족을 만족한다.

(1) $0 \leqq \int_a^c f(x)\,dx \leqq \int_a^c g(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx = A$

(2) $c_1 < c_2$이면 $\int_a^{c_1} f(x)\,dx \leqq \int_a^{c_2} f(x)\,dx$.

그러므로 함수 $F(c) = \int_a^c f(x)\,dx$는 위로 유계인 증가함수이다. 따라서 실수의 완비성 공리에 의하여 최소상계 $\sup\{\mathrm{F(c)} \mid \mathrm{c} \in [\mathrm{a},\mathrm{b})\} = \mathrm{B}$가 존재한다. 그러면 주어진 임의의 양수 $\epsilon > 0$에 대하여 $B-\epsilon$은 이 집합 $\{F(c) \mid c \in [a,b)\}$의 상계가 아니므로 $B-\epsilon < F(c_0)$을 만족하는 적당한 점 $a \leqq c_0 < b$가 존재하다. 그러면 단조성에 의하여 다음이 성립한다.

$$c_0 < c < b \Rightarrow B-\epsilon < F(c_0) \leqq F(c) \leqq B$$

즉, $\delta = b - c_0$로 선택하면 $b-\delta < c < b$를 만족하는 모든 c에 대하여 $|F(c)-B| < \epsilon$이 성립한다. 그러므로 $B = \lim_{c \to b-} F(c) = \int_a^b f(x)\,dx$가 존재한다. 따라서 정의에 의하여 이상적분가능하다.

좌방극한에 대한 내용이나 구간$(-\infty, b]$에서의 이상적분에 대해서도 유사하게 증명된다.
이상에서 증명한 내용을 이상적분의 수렴성에 대한 **비교판정법**이라고 부른다.
(1) 수렴 (2) 수렴 (3) 수렴 (4) 수렴 (5) 수렴 (6) 수렴 (7) 수렴 (8) 수렴

42. $\lim_{R\to\infty} f(R)e^{-R} = 0$이라고 가정하고 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $[0,\infty)$에서 연속이라고 가정하면, 임의의 양수 $b > 0$에 대하여 부분적분법에 의하여 다음을 얻는다.

$$\int_0^b f(x)e^{-x}dx = [-f(x)e^{-x}]_0^b - \int_0^b (-e^{-x})f'(x)dx = -f(b)e^{-b} + f(0) + \int_0^b e^{-x}f'(x)dx$$

그러므로 양변에 $b \to \infty$일 때의 극한을 취하면 다음이 성립하다.

$$\int_0^\infty f(x)e^{-x}dx = f(0) + \int_0^\infty f'(x)e^{-x}dx$$

(1) $\lim_{R\to\infty} \sin R e^{-R} = 0$이므로 위의 식에 의하여 $\int_0^\infty \sin x\, e^{-x}dx = \sin 0 + \int_0^\infty \cos x\, e^{-x}dx$ 이므로 성립한다.

(2) $\lim_{R\to\infty}\cos R\,e^{-R}=0$이므로 위의 식에 의하여 다음과 같이 되어 성립한다.

$$\int_0^{\infty}\cos x\,e^{-x}dx=\cos 0+\int_0^{\infty}(-\sin x)e^{-x}dx$$

(3) $\frac{1}{2}$　(4) $n!$

43. (1) $\int_a^{\infty}\frac{\ln^k x}{x}dx$의 수렴성 :

(경우1) $k<-1$인 경우에는 $\int_a^{\infty}\frac{\ln^k x}{x}dx=[\frac{1}{k+1}ln^{k+1}x]_a^{\infty}=-\frac{1}{k+1}ln^{k+1}a$이므로 수렴한다.

(경우2) $k>-1$인 경우에는 $\int_a^{\infty}\frac{\ln^k x}{x}dx=[\frac{1}{k+1}ln^{k+1}x]_a^{\infty}=\infty-\frac{1}{k+1}ln^{k+1}a=\infty$이므로 발산한다. (경우3) $k=-1$인 경우에는 $\int_a^{\infty}\frac{\ln^{-1}x}{x}dx=\int_a^{\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=[\ln(\ln x)]_a^{\infty}=\infty$이므로 발산한다.

(2) $\int_0^a x^k\ln x\,dx$는 $k>-1$일 때 수렴하고 $k\leqq-1$일 때 발산

(3) $\int_a^{\infty}\frac{1}{x^k}dx$는 $k>1$일 때 수렴하고, $k\leqq 1$일 때 발산

(4) $\int_a^b\frac{1}{(x-a)^k}dx$는 $k<1$일 때 수렴하고 $k\geqq 1$일 때 발산

44. $f(x)$가 모든 실수에서 연속이고 $f(x)\geqq 0$을 만족하며, $\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^a f(x)dx=A$로 수렴한다고 하자. 그러면 가정에 의하여 $a>0$이므로 $(1+x^2)^a\geqq 1$임을 알 수 있다. 따라서 모든 실수x에 대하여 $f(x)\leqq(1+x^2)^a f(x)$이 성립한다. 그러므로 비교판정법에 의하여 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$도 수렴한다. ($\int_{-\infty}^{b}f(x)dx$인 경우의 비교판정법의 증명은 $\int_a^{\infty}f(x)dx$인 경우의 증명과 매우 유사함을 밝혀둔다.)

45. 함수 $f(x)$가 구간 $(a,b]$에서 연속이고 $0<p<1$에 대하여 $\lim_{x\to a+}(x-a)^p f(x)=M$을 만족하는 실수 M이 존재한다고 가정하자. 그러면 극한의 $\epsilon-\delta$정의에 의하여 다음이 성립한다.

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0\ s.t.\ a<x<a+\delta\ \Rightarrow|(x-a)^p f(x)-M|<\epsilon.$$

$\delta>0$가 한 개 존재하면 그 보다 작은 모든 양수 δ도 위의 명제를 만족하므로, 특히 $\epsilon=1$에 대하여 존재하는 δ를 $\delta<b-a$로 선택할 수 있다. 그러면 $a<x<a+\delta<b$를 만족하는 모든 x에 대하여 $(x-a)^p|f(x)|<|M|+1$, 즉, $|f(x)|<\frac{|M|+1}{(x-a)^p}$이 성립한다. 이제

$$\int_a^b|f(x)|dx=\int_a^{a+\delta}|f(x)|dx+\int_{a+\delta}^b|f(x)|dx$$

와 같이 나타내면 우선 $f(x)$는 $[a+\delta, b]$에서 연속이므로 $\int_{a+\delta}^{b} |f(x)|dx$는 존재한다. 그리고

$$\int_{a}^{a+\delta} |f(x)|dx \leqq \int_{a}^{a+\delta} \frac{|M|+1}{(x-a)^p}dx$$

를 만족한다. 그런데 $\int_{a}^{a+\delta} \frac{|M|+1}{(x-a)^p}dx = \frac{|M|+1}{-p+1}[(x-a)^{-p+1}]_{a}^{a+\delta} = \frac{|M|+1}{-p+1}\delta^{-p+1}$로 수렴하므로 비교판정법에 의하여 $\int_{a}^{a+\delta} |f(x)|dx$도 수렴한다. 따라서 $\int_{a}^{b} |f(x)|dx$도 수렴한다.

연습문제 (6.1)

1. $\frac{37}{12}$ 2. $\frac{32}{3}$ 3. $\frac{4}{3}$ 4. $\frac{1}{2}$ 5. $\ln 3$

6. $\ln 3$ 7. $\frac{1}{3}$ 8. $\frac{1}{6}$ 9. $\frac{1}{216}$ 10. $\frac{125}{6}$

11. $3\sqrt{3}$ 12. $2(-\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi})$ 13. $\frac{\pi}{2}-1$ 14. $\ln 2$ 15. $\frac{3}{\ln 2}$

16. $\frac{1}{2}(1-e^{-12})$ 17. $\frac{1}{2}(1-e^{-1})$ 18. $\frac{e-e^{-1}}{2}$ 9. $\frac{1}{4}$

20. $\frac{a}{b}\sinh bc$ (단, a, b, $c>0$) 21. $\frac{1}{4}(27-16\ln 2)$

22. $8\ln 4-\frac{33}{4}$ 23. $2-5e^{-1}$ 24. $4\cosh^{-1}4-\sqrt{15}$ 25. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$

26. $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$ 27. $2(\pi-\frac{2}{3})a^2$ 28. $\frac{1}{4}(\pi-2\ln 2)a^2$ 29. $2(\frac{8}{3}-\ln 3)$

30.$\frac{55}{6}$ 31. $\frac{1}{3}a^2$ 32. 9 33. $\frac{1}{4}$ 34. $\frac{\pi}{2}$ 35. 4π

36. $(2\pi+\frac{15\sqrt{3}}{2})a^2$ 37. $\frac{3}{8}\pi a^2$ 38. $\frac{1}{6}a^2$ 39. $\frac{1}{2}abu_0$ 40. $\frac{256}{15}$

41. π 42. $\frac{\pi}{2}$ 43. $4\pi a^2$

연습문제 (6.2)

1. π 2. $\frac{3}{2}\pi a^2$ 3. π 4. $\frac{3}{2}\pi a^2$ 5. 12π

6. $\frac{3}{2}\pi$ 7. 4 8. 2π 9. $2a^2$ 10. $2a^2$

11. $\frac{\pi}{2}$

12. (1) $n=0$: $A=\pi a^2$ (2) $|n|$이 홀수 : $\frac{\pi}{4}a^2$ (3) $|n|$이 짝수: $\frac{\pi}{2}a^2$

13. $\frac{3}{2}\pi a^2$

14. 작은고리 : $a^2(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2})$ 큰고리 : $a^2(2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2})$

15. $\frac{9}{2}\pi a^2$ 16. $\frac{\pi}{32}$ 17. 9π 18. $\frac{25}{4}\pi$ 19. $\frac{5}{4}\pi$

20. $(\frac{\pi}{3} + 2 - \sqrt{3})a^2$ 21. $\frac{1}{2}(1+\pi) - \frac{9\sqrt{3}}{8}$ 22. $3 + 2\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \sqrt{15}$

23. $\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$ 24. $\frac{10\pi}{3} + \frac{7\sqrt{3}}{2}$ 25. $4(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3})$ 26. $\frac{9\sqrt{3}}{2} - 2\pi$

27. $\frac{8}{3}\pi + \sqrt{3}$ 28. $\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}$ 29. $\frac{21\sqrt{3}}{16}$ 30. $\frac{1}{8}(\pi+2)a^2$

31. $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ 32. $32 + 4\pi$

33. $12\pi - 6\cos^{-1}(-\frac{4}{5}) + \frac{36}{5}$, 단, $\pi < \cos^{-1}(-\frac{4}{5}) < \frac{3}{2}\pi$.

34. $\frac{1}{32}(3\sqrt{3} + 4\pi)a^2$ 35. $\frac{5}{4}\pi$ 36. $\frac{4}{3}$

37. $2 - \frac{\pi}{2}$ 38. $3\sqrt{3} - 3\ln(2 + \sqrt{3})$ 39. $a^2(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2})$

40. $(2 - \frac{\pi}{2})a^2$ 41. $\frac{\pi}{2}a^2$ 42. πab 43. $\frac{32}{3}$

44. $\frac{1}{2}$ 45. $\frac{1}{8}(4-\pi)a^2$ 46. a^2 47. πa^2

연습문제 (6.3)

1. $\frac{206}{15}\pi$ 2. $\frac{153}{5}\pi$ 3. (a) $\frac{256}{15}\pi$ (b) 8π

4. (a) $\frac{32}{3}\pi$ (b) $\frac{16}{3}\pi$ 5. $\frac{1024}{5\pi}$ 6. $\frac{2187}{7}\pi$ 7. $\frac{1}{4}\pi$

8. $\frac{65}{4}\pi$ 9. $\frac{100}{3}\pi$ 10. $\frac{6558}{7}\pi$ 11. $\frac{243}{5}\pi$ 12. $\frac{4}{3}\pi$

13. 32π 14. $\frac{531441}{4}\pi$ 15. $\frac{243\sqrt[3]{9}}{7}\pi$ 16. $\frac{32}{3}\pi$ 17. $\frac{4}{3}\pi ab^2$

18. $\frac{24}{5}\pi$ 19. $\frac{512}{3}\pi$ 20. $\frac{\pi}{3}(3r-h)h^2$ 21. $\frac{2}{3}\pi$ 22. $\frac{128}{5}\pi$

23. $\frac{128}{3}$ 24. 8π 25. 2 26. $\frac{16}{315}$

연습문제 (6.4)

1. 6π 2. $\frac{\pi}{2}$ 3. $\frac{36\sqrt{3}}{5}\pi$ 4. $\frac{81}{2}\pi$ 5. $\frac{40\sqrt{5}}{3}\pi$

6. $\frac{135}{2}\pi$ 7. $\frac{23}{30}\pi$ 8. $\frac{27}{2}\pi$ 9. $\frac{\pi}{2}$ 10. $\frac{208}{5}\pi$

11. $\frac{8}{3}\pi$ 12. $\frac{88}{5}\pi$

13. (a) $\pi\int_a^b (f^2(x)-g^2(x))dx$ (b) $2\pi\int_a^b x(f(x)-g(x))dx$

(c) $2\pi\int_a^b (x-a)(f(x)-g(x))dx$ (d) $2\pi\int_a^b (b-x)(f(x)-g(x))dx$

14. (a) $\pi\int_c^d (f^2(y)-g^2(y))dy$ (b) $2\pi\int_c^d y(f(y)-g(y))dy$

(c) $2\pi\int_c^d (3-y)(f(y)-g(y))dy$

15. (a) $A=\int_1^3 \frac{1}{x^3}dx$ (b) $V=2\pi\int_1^3 \frac{1}{x^2}dx$

(c) $V=\pi\int_1^3 (\frac{1}{x^6}+\frac{2}{x^3})dx$ (d) $V=2\pi\int_1^3 (\frac{4}{x^3}-\frac{1}{x^2})dx$

16. (a) $A=\int_0^2 (x^3+1)dx$ (b) $V=2\pi\int_0^2 (x^4+x)dx.$

(c) $V=\pi\int_0^2 (x^6+4x^3+3)dx$ (d) $V=2\pi\int_0^2 (4-x)(x^3+1)dx$

17. $\frac{64}{5}\pi$ 18. $\frac{208}{15}\pi$ 19. $\frac{4}{3}\pi(b^2-a^2)^{3/2}$ 20. $2\pi^2a^2b$

21. $(\sqrt{2}-1)\pi$ 22. $8\pi^3-4\pi^2$

23. (a) $\frac{2}{15}\pi$ (b) $\frac{1}{6}\pi$ (c) $\frac{\pi}{60}$ 24. $\frac{4}{3}\pi r^3$ 25. $\frac{1}{3}rS$

연습문제 (6.5)

1. $\frac{14}{3}$ 2. $\frac{1}{4}[\sqrt{5}+\ln(\sqrt{5}+2)]$ 3. πa 4. $\frac{1}{27}(13\sqrt{13}-8)$ 5. $\frac{1}{2}(4+\ln 3)$

6. $\frac{14}{3}$ 7. $\frac{14}{3}$ 8. $1-\ln 2+\ln 3$ 9. $4\sqrt{3}$

10. $\sqrt{e^2+1}-\ln(\sqrt{e^2+1}+1)+(1-\sqrt{2})+\ln(\sqrt{2}+1)$

11. $\frac{33}{16}$ 12. $\ln 3$ 13. $2\sqrt{3}$ 14. $\frac{4}{29}(10\sqrt{10}-1)$ 15. $4\sqrt{3}$

16. $13\sqrt{13}-5\sqrt{5}$ 17. $\frac{4\sqrt{13}}{3}$ 18. $\frac{28}{3}$ 19. $\frac{21}{2}$ 20. 72

21. 3 22. $6a$ 23. $\ln 3$ 24. $a\ln(\cosh 2\ \cosh 1)$ 25. $\ln 2$

26. 4 27. $2\pi a$ 28. $6a$ 29. $8a$ 30. $8a$ 31. $8a$

32. $8a$ 33. $4a$ 34. $4a$ 35. $\frac{3}{2}\pi a$ 36. $\frac{16}{3}a$

37. $\frac{3}{2}\pi a$ 38. $\frac{16}{3}a$ 39. $2\pi\sqrt{a^2+b^2}$ 40. 2π

41. $\frac{1}{2}[2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln(\sqrt{1+4\pi^2}+2\pi)]$

42. $\frac{a}{2}[2\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\ln(\sqrt{1+4\pi^2}+2\pi)]$

43. $\frac{\sqrt{5}}{2}(e^{4\pi}-1)$ 44. $\frac{\sqrt{10}}{3}(e^{6\pi}-1)$

45. $2[-\frac{\sqrt{17}}{4}+\ln(\sqrt{17}+4)+\sqrt{5}-\ln(\sqrt{5}+1)+\ln 2]$

46. $\frac{1}{27}(13\sqrt{13}+31\sqrt{31}-16)$ 47. 4 48. ∞

연습문제 (6.6)

1. $\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)\pi$ 2. $\frac{1}{4}\pi a^2(e^2+4-e^{-2})$ 3. $\frac{10}{3}\pi$ 4. $(\frac{15}{4}+\ln 2)\pi$

5. $\frac{64}{3}\pi a^2$ 6. $\frac{2\sqrt{2}\pi}{5}(2e^{\pi}+1)$ 7. $2\pi a^2(1-\operatorname{sech}2)$

8. $\pi b^2+\frac{\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}\sin^{-1}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 9. $\frac{1}{6}(17\sqrt{17}-1)\pi$ 10. $\frac{32}{3}\pi$

11. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\pi$ 12. $2\pi(1-e^{-1})a^2$ 13. $\frac{4}{3}\pi(13\sqrt{26}-\sqrt{2})$

14. $32\pi^2a^2$ 15. $4\pi^2ab$ 16. $2\pi(\pi-1)$ 17. $4\pi a^2(2-\sqrt{2})$

18. $4\pi^2a^2$ 19. $\frac{32}{5}\pi a^2$ 20. $\frac{10403}{8}\pi$ 21. $4\sqrt{2}\pi a^2$

22. $\frac{2\sqrt{2}}{5}\pi(2e^{2\pi}+e^{\pi}-1)$ 23. $4\pi^2a^2$ 24. $\frac{32}{5}(3\sqrt{2}-2)\pi a^2$ 25. $\frac{32}{5}\pi a^2$

26. 2π 27. $\pi(\ln\frac{(2+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{(1+\sqrt{2})^3}-2\ln 2+\sqrt{2})$

28. $\frac{601}{192}\pi$ 29. $(\frac{7}{3}-\frac{1}{2}\ln 2)\pi$ 30. $4\pi^2ab$ 31. $2\sqrt{2}\pi(\frac{2e^{\pi}+1}{\sqrt{5}}+e^{\pi/2}-1)$

32. $4\pi^2ab$ 33. $4\pi^2ab$ 34. $\frac{16}{81}\pi[\frac{110}{3}\sqrt{10}-\frac{169}{60}\sqrt{13})$

35. $\frac{153}{40}\pi$ 36. $\frac{1}{2}\pi(2+\sinh 4-5\sinh 2+4\sinh 1)$

연습문제 (6.7)

1. $\frac{19}{54}$와 $\frac{1}{3}$과의 비교 2. $\frac{11}{32}$과 $\frac{1}{3}$의 비교 3. $\frac{28}{15}$과 $\ln 5$의 비교

4. $\frac{283}{140}$과 $\ln 7$의 비교

5. $\frac{1}{10}+\frac{\sqrt{26}}{26}+\frac{\sqrt{29}}{29}+\frac{\sqrt{34}}{34}+\frac{\sqrt{41}}{41}+\frac{\sqrt{2}}{20}$와 $\ln(1+\sqrt{2})$의 비교

6. $\frac{1}{20}+\frac{\sqrt{99}}{99}+\frac{\sqrt{96}}{96}+\frac{\sqrt{91}}{91}+\frac{\sqrt{84}}{84}+\frac{\sqrt{3}}{30}$와 $\frac{\pi}{6}$

7. $\frac{\pi}{36}[2(\sin\frac{\pi}{18}+\sin\frac{2\pi}{18}+\cdots+\sin\frac{7\pi}{18}+\sin\frac{8\pi}{18})+1]$과 1의 비교

8. $\frac{1}{20}[1+e+2(e^{1/10}+e^{2/10}+\cdots+e^{9/10})]$과 e의 비교

9. $\frac{1}{60}(1+\sqrt{1.3}+4(\sqrt{1.05}+\sqrt{1.15}+\sqrt{1.25})+2(\sqrt{1.1}+\sqrt{1.2}))$와 $\frac{2}{3}(1.3\sqrt{1.3}-1)$ 비교

10. $\frac{1}{3}(\frac{4}{3}+4(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{8}})+2(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}))$와 4의 비교

11. $\frac{4}{3}(\frac{1}{5}+\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{13}})$와 2의 비교

12. $\frac{1}{6}(\frac{4}{3}+\frac{5\sqrt{2}}{3}+\frac{12\sqrt{70}}{35})$와 $\frac{4}{3}$ 비교

13. $\frac{1747}{2520}$과 $\ln 2$의 비교

14. $\frac{1}{24}(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}+32(\frac{\sqrt{63}}{63}+\frac{\sqrt{55}}{55})+\frac{8\sqrt{15}}{15})$와 $\frac{\pi}{6}$의 비교

15. $\frac{1}{12}(1+\frac{\sqrt{2}}{2}+16(\frac{1}{\sqrt{17}}+\frac{1}{5})+\frac{4\sqrt{5}}{5})$와 $\ln(1+\sqrt{2})$의 비교

16. $\frac{\pi}{40}(1+4(\sin\frac{\pi}{20}+\sin\frac{3\pi}{20}+\cdots+\sin\frac{9\pi}{20})+2(\sin\frac{\pi}{10}+\sin\frac{\pi}{5}+\cdots+\sin\frac{2\pi}{5}))$와 1의 비교

17. 사다리꼴 $\frac{1}{8}[1+2(\frac{64}{65}+\frac{64}{72}+\frac{64}{91})+\frac{1}{2}]$, 심프슨 $\frac{1}{12}(\frac{3}{2}+4(\frac{64}{65}+\frac{64}{91})+\frac{16}{9})$

18. 사다리꼴 $\frac{1}{12}(1+2(\frac{e^{7/6}}{7/6}+\frac{e^{4/3}}{4/3}+\cdots+\frac{e^{11/6}}{11/6})+\frac{e^2}{2})$

심프슨 $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}[1+\frac{e^2}{2}+4(\frac{e^{7/6}}{7/6}+\frac{e^{3/2}}{3/2}+\frac{e^{11/6}}{11/6})+2(\frac{e^{4/3}}{4/3}+\frac{e^{5/3}}{5/3})]$

19. 사다리꼴 $\frac{1}{20}[\frac{1}{\ln 2}+2(\frac{1}{\ln\frac{9}{4}}+\frac{1}{\ln\frac{5}{2}}+\frac{1}{\ln\frac{11}{4}})+\frac{1}{\ln 3}]$

심프슨 $\frac{1}{30}[1+e^{-0.36}+4(e^{-0.01}+e^{-0.09}+e^{-0.25})+2(e^{-0.04}+e^{-0.16})]$

20. 사다리꼴 $\frac{1}{6}(\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{2}})$ 심프슨 $\frac{2\pi}{9}(\sqrt{2}+1+\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}})$

21. 사다리꼴 $\frac{1}{10}[2(\sin 0.04+\sin 0.16+\sin 0.36)+\sin 0.64]$,

$\frac{1}{15}(\sin 0.64+4(\sin 0.04+\sin 0.36)+2\sin 0.16)$

22. 사다리꼴 $\frac{\pi}{16}(1+\frac{8\sqrt{102}}{17}+\sqrt{2})$ 심프슨 $\frac{\pi}{24}(1+\sqrt{2}+\frac{16\sqrt{102}}{17})$

23. 사다리꼴 $\frac{1}{8}[\frac{1}{\ln 2}+2(\frac{1}{\ln\frac{9}{4}}+\frac{1}{\ln\frac{5}{2}}+\frac{1}{\ln\frac{11}{4}})+\frac{1}{\ln 3}]$

심프슨 $\frac{1}{12}[\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+4(\frac{1}{\ln\frac{9}{4}}+\frac{1}{\ln\frac{11}{4}})+2\frac{1}{\ln\frac{5}{2}}]$

24. 사다리꼴 $\frac{\pi}{96}(2(\ln\tan\frac{13\pi}{48}+\ln\tan\frac{7\pi}{24}+\ln\tan\frac{5\pi}{16})+\frac{1}{2}\ln 3)$

심프슨 $\frac{1}{3}\frac{\pi}{48}[0+\frac{1}{2}\ln 3+4(\ln\tan\frac{13\pi}{48}+\ln\tan\frac{5\pi}{16})+2\ln\tan\frac{7\pi}{24}]$

25. 사다리꼴 $\frac{1}{20}(2(\sin\sqrt{\frac{1}{10}}+\cdots+\sin\sqrt{\frac{9}{10}})+\sin 1)$

심프슨 $\frac{1}{30}[\sin 1+4(\sin\sqrt{\frac{1}{10}}+\cdots+\sin\sqrt{\frac{9}{10}})+2(\sin\sqrt{\frac{1}{5}}+\cdots+\sin\sqrt{\frac{4}{5}})]$

26. 사다리꼴$\frac{1}{8}(\frac{\sin 0.5}{0.5}+2(\frac{\sin 0.75}{0.75}+\sin 1+\frac{\sin 1.25}{1.25})+\frac{\sin 1.5}{1.5})$

심프슨 $\frac{1}{12}[\frac{\sin 0.5}{0.5}+\frac{\sin 1.5}{1.5}+4(\frac{\sin 0.75}{0.75}+\frac{\sin 1.25}{1.25})+2\sin 1]$

27. $\ln 2 \approx 0.6933$

28. $\pi \approx 4\cdot 0.78539215\cdots \approx 3.1416$

29. $\frac{1}{2}(a+b)=k$라고 놓고 3차다항함수를 $y=A+B(x-k)+C(x-k)^2+D(x-k)^3$이라고 하면 $a=k-h$, $b=k+h$이므로 구하는 넓이는

$\int_a^b (A+B(x-k)+C(x-k)^2+D(x-k)^3)dx$

$=\int_{k-h}^{k+h}(A+B(x-k)+C(x-k)^2+D(x-k)^3)dx=2Ah+\frac{2}{3}Ch^3=\frac{1}{3}h(6A+2Ch^2)$이 된다. 이때, $6A+2Ch^2$를 y_0, $y_{1/2}$, y_1의 항으로 나타내기 위하여 주어진 3차다항함수에 각각 $x=k-h$, k, $k+h$를 차례로 대입하면 $y_0=A-Bh+Ch^2-Dh^3$, $y_{1/2}=A$, $y_1=A+Bh+Ch^2+Dh^3$을 얻는다. 따라서 $y_0+4y_{1/2}+y_1=6A+2Ch^2$이 된다.

그러므로 $S_0=\frac{1}{3}h(y_0+4y_{1/2}+y_1)$을 얻는다.

30. $\frac{4}{3}(22+6\sqrt{2}+10\sqrt{3}+6\sqrt{5}+2\sqrt{6}+2\sqrt{7})=95.21690589\cdots\approx 95.2169$

31. $\frac{1}{18}(1+\cos 1+4(\cos\frac{1}{36}+\cos\frac{1}{4}+\cos\frac{25}{36})+2(\cos\frac{1}{9}+\cos\frac{4}{9}))\approx 0.9045$

32. 구간 $[a,b]$를 n등분하면 $h=\frac{b-a}{n}=x_i-x_{i-1}$, $i=1,2,\cdots,n$이므로 다음을 얻는다.

$T=\frac{1}{2}\frac{b-a}{n}[f(a)+2(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1}))+f(b)]$

$M=[f(c_1)\frac{b-a}{n}+f(c_2)\frac{b-a}{n}+\cdots+f(c_n)\frac{b-a}{n}]=\frac{b-a}{n}[f(c_1)+f(c_2)+\cdots+f(c_n)]$

한편, 분점의 중점을 포함시킨 $2n+1$개의 분점 $x_0, c_1, x_1, \cdots, c_n, x_n$을 이용하여 심프슨의 공식을 적용하면 다음과 같이 증명된다.

$S=\frac{1}{3}\frac{b-a}{2n}[f(a)+f(b)+4(f(c_1)+f(c_2)+\cdots+f(c_{n-1}))+2(f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1}))]$

$=\frac{1}{3}\frac{b-a}{2n}[f(a)+2(f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1}))+f(b)+4(f(c_1)+f(c_2)+\cdots+f(c_{n-1}))]$

$=\frac{1}{3}\frac{b-a}{2n}[\frac{2n}{b-a}T+4\frac{n}{b-a}M]=\frac{1}{3}[T+2M]$

33. $f(x)=x$, x^3일 때에는 기함수이므로 $\int_{-1}^{1}f(x)=0$이고 $f(-\frac{1}{\sqrt{3}})=-f(\frac{1}{\sqrt{3}})$이 되므

로 성립한다. 한편 $f(x)=1$일 때에는 $\int_{-1}^{1} f(x)dx=[x]_{-1}^{1}=2=f(-\frac{1}{\sqrt{3}})+f(\frac{1}{\sqrt{3}})$이므로 성립하고, $f(x)=x^2$이 때에는 $\int_{-1}^{1} f(x)dx=[\frac{1}{3}x^3]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}=f(-\frac{1}{\sqrt{3}})+f(\frac{1}{\sqrt{3}})$이므로 성립한다.

34. $\frac{4\pi}{36}[3+2(\sqrt{10-3\sqrt{3}}+\sqrt{10}+\sqrt{10+3\sqrt{3}})+(\sqrt{7}+\sqrt{13})]$(계산생략)

35. $\frac{\pi}{6}[1+\sqrt{2}+2\sqrt{6}]$(계산생략)

36. $\frac{\pi^2}{48}[2\sqrt{2}+\sqrt{6-\sqrt{2}}+3\sqrt{6+\sqrt{2}}+\sqrt{6}]$(계산생략)

37. $\frac{\pi}{384}[64\sqrt{2}+\sqrt{4097}+3\sqrt{4825}+8\sqrt{65}]$(계산생략)

연습문제 (7.2)

1. $(AB)C=\begin{pmatrix}10\\14\end{pmatrix}$, $A(BC)=\begin{pmatrix}10\\14\end{pmatrix}$ 2. $(AB)C=\begin{pmatrix}33 & 37\\11 & -18\end{pmatrix}$, $A(BC)=\begin{pmatrix}33 & 37\\11 & -18\end{pmatrix}$

3. $AB==\begin{pmatrix}-5 & 0 & 0\\-2 & -4 & -1\\2 & -1 & -4\end{pmatrix}$ 4. $BA=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\4 & -5 & 0\\3 & 0 & -5\end{pmatrix}$

5. $A^TB=\begin{pmatrix}-3 & 4 & -4\\0 & -5 & 5\\3 & 1 & -6\end{pmatrix}$ 6. $B^TA=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 3\\4 & -5 & 1\\-4 & 5 & -6\end{pmatrix}$

7. $B^TA^T=\begin{pmatrix}-5 & -2 & 2\\0 & -4 & -1\\0 & -1 & -4\end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix}7 & 16 & 15\\5 & 2 & 4\end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix}17 & -21 & 19\\-6 & 16 & -15\end{pmatrix}$

10. (1) 행렬$A=(a_{ij})$의 i행 j열의 원소를 $(i,\ j)$원소라고 정의하면
$(A+B)^T$의 (i,j)원소 $=A+B$의 $(j,\ i)$원소$=A$의 $(j,\ i)$원소$+B$의 $(j,\ i)$원소 $=A^T$의 $(i,\ j)$원소$+B^T$의 $(i,\ j)$원소$=A^T+B^T$의 $(i,\ j)$원소

(2) $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{jk})_{n\times p}$라고 하면 임의의 상수 k에 대하여

$$(kA)B=(ka_{ij})(b_{jk})=(\sum_{j=1}^{n}(ka_{ij}\cdot b_{jk}))=(\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\cdot (kb_{jk})))=A(kB)$$

$$(kA)B=(ka_{ij})(b_{jk})=(\sum_{j=1}^{n}(ka_{ij}\cdot b_{jk}))=(k\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\cdot b_{jk}))=k(\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\cdot b_{jk}))=k(AB)$$

11. (i) $A^2=\begin{pmatrix}10 & 2\\3 & 7\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}26 & 18\\27 & -1\end{pmatrix}$ (ii) $f(A)=\begin{pmatrix}26 & 14\\21 & 5\end{pmatrix}$ (iii) $g(A)=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

12. $f(B)=\begin{pmatrix}31 & 12\\20 & 39\end{pmatrix}$ (ii) $g(B)=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix}\frac{3}{5}a\\a\end{pmatrix}$($a$는 실수(복소수도 가능))

13. $\left\{\begin{pmatrix}x & y\\0 & x\end{pmatrix} \mid x, y\in R\right\}$ 14. $\begin{pmatrix}1 & 2n\\0 & 1\end{pmatrix}$

15. (i) $e_1A=(a_1\ a_2\ a_3\ a_4)$ (ii) $e_2A=(b_1\ b_2\ b_3\ b_4)$ (iii) $e_3A=(c_1\ c_2\ c_3\ c_4)$

연습문제 (7.3)

1. $x=\frac{36}{17}$, $y=\frac{25}{17}$ 2. $x=3$, $y=0$ 3. $y=\frac{7}{5}z$, $z=$임의의 실수

4. 해가 없다. 5. $x=-1$, $y=0$, $z=1$ 6. $x=2$, $y=1$, $z=-3$

7. $x=\frac{1}{5}z$, $y=\frac{7}{5}z$, $z=$임의의 실수

8. $z=0$, $x=2+3y$, $y=$임의상수

9. $x=2z, y=3z$, z는 임의의 실수

10. $x=\frac{1}{25}(46b_1+18b_2-19b_3)$, $y=\frac{1}{25}(9b_1-3b_2-b_3)$, $z=\frac{1}{25}(-13b_1-4b_2+7b_3)$

연습문제 (7.4)

1. (1) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} -7 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$

2. (1) $x_1=41$, $x_2=-17$ (2) $x_1=\frac{46}{27}$, $x_2=-\frac{13}{27}$

(3) $\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ 16 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 2a_1-5a_2 \\ -a_1+3a_2 \end{pmatrix}$

(6) $x_1=-\frac{15}{2}a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{5}{2}a_3$, $x_2=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}a_2-\frac{1}{2}a_3$, $x_3=\frac{5}{2}a_1-\frac{1}{2}a_2-\frac{1}{2}a_3$

연습문제 (7.5)

1. (1) 기순열 (2) 기순열 (3) 우순열 (4) 우순열 (5) 우순열 (6) 기순열

2. (1) 5 (2) k^2-4k-5 (3) -28 (4) -240 (5) $-3x^5+3x^4+7x^3-3x^2+x$

(6) 33 (7) 425 (8) 104 (9) $-k^4-k^3+18k^2+9k-21$ (10) $xyz(x-y)(y-z)(z-x)$

연습문제 (7.6)

1. (1). 0 (2). 0 (3). 0 (4). 0 (5). 135 (6). 6 (7). -21 (8) 0 (9) xyz

2. (1) 5 (2) 10 (3) 10

연습문제 (7.7)

1. (1) $M_{11}=\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=29$, $M_{12}=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-11$, $M_{13}=\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-19$, $M_{21}=\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=21$,

$M_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=13$, $M_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-19$, $M_{31}=\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}=27$, $M_{32}=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-5$,

$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 19$

(2) $C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 29$, $C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 11$, $C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -19$,

$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -21$, $C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 13$, $C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 19$,

$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 27$, $C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5$, $C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 19$

2. (1) 48 (2) -66 (3) 534 (4) 279

3. (1) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & -5 \\ -3 & -6 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ (2) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (3) $\dfrac{1}{64}\begin{pmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -1 & 8 \\ 6 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$

4. $x = -\dfrac{7}{85}$ 5. $x = -1$ 6. $(ae-db)^2$ 7. $y^3(4x+y)$

8. $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$

9. $(y-x)(z-x)(z-y)(1-zy-xz-xy-x^2yz-xy^2z-xyz^2+x^2y^2z^2)$

10. $2(a-b)(b-c)(c-a)(x-y)(y-z)(z-x)$ 11. $(a+b+c)(a-b-c)(a-b+c)(a+b-c)$

12. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$ 13. $(x-a)(x-b)(x-c)$

연습문제 (7.8)

1. (1) $x=3, y=-3, z=1$ (2) $x=-1, y=1, z=2$ (3) $x=6, y=4, z=5$

(4) $x = \dfrac{5}{2}, y = -\dfrac{2}{3}, z = -\dfrac{1}{6}, w = \dfrac{1}{3}$

(5) $x = \dfrac{1883}{305}$, $y = -\dfrac{1455}{305} = -\dfrac{291}{61}$, $z = -\dfrac{975}{305} = -\dfrac{195}{61}$, $w = -\dfrac{2774}{305}$

(6) $x = -\dfrac{131}{61}, y = \dfrac{50}{61}, z = \dfrac{472}{61}, w = \dfrac{368}{61}$

2. $a = -\dfrac{3}{2}$ 3. $x_1 = -\dfrac{1}{9}, x_2 = -\dfrac{5}{9}, x_3 = \dfrac{20}{9}$

4. 계수의 행렬이 0이 아니므로 Cramer의 정리에 의하여 임의의 해는

$x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 와 같아야 한다. 그러므로 유일한 해를 갖는다.

5. $s \neq -2, 2$일 때 $x_1 = \dfrac{4s+2}{3s^2-12}$, $x_2 = \dfrac{s+8}{s^2-4}$

6. $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ 7. $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = 0$ 8. $x_1 = 5$, $x_2 = -10$

9. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ 10. $x_1 = \dfrac{1}{2}, x_2 = \dfrac{1}{2}, x_3 = -\dfrac{1}{2}$

11. $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = -7$ 12. $x_1 = \dfrac{1}{3}, x_2 = \dfrac{1}{3}, x_3 = 0$

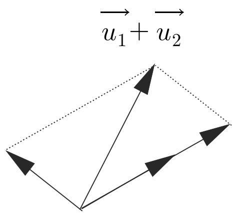
13. $x_1 = 0, x_2 = \dfrac{1}{2}, x_3 = 0$ 14. $x_1 = \dfrac{1}{3}, x_2 = 1, x_3 = \dfrac{4}{3}$

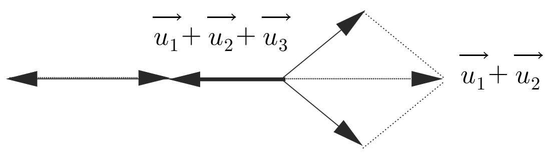
연습문제 (7.9)

1. $(3-\lambda)(-1-\lambda)=0$, $\lambda=-1,3$, $\lambda=-1$일 때 $(0,1)^T(t\neq 0)$, $\lambda=3$일 때 $(1,2)^T(t\neq 0)$
2. $\lambda^2-12=0$, $\lambda=-2\sqrt{3},2\sqrt{3}$, $\lambda=-2\sqrt{3}$ 일 때 $(\sqrt{3},-2)^Tt$ (단, $t\neq 0$), $\lambda=2\sqrt{3}$ 일 때 $(\sqrt{3},2)^Tt$ (단, $t\neq 0$)
3. $\lambda^2+3=0,\lambda=\pm\sqrt{3}i$, $\lambda=-\sqrt{3}i$일 때 $(7,-2+\sqrt{3}i)^Tt$ (단, $t\neq 0$), $\lambda=\sqrt{3}i$일 때 $(7,-2-\sqrt{3}i)^Tt$ (단, $t\neq 0$)
4. $(1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$, $\lambda=1,2,3$, $\lambda=1$일 때 $(0,1,0)^Tt$ (단, $t\neq 0$), $\lambda=2$일 때 $(1,-2,-2)^Tt$ (단, $t\neq 0$), $\lambda=3$일 때 $(1,-1,-1)^Tt$ (단, $t\neq 0$)
5. $-\lambda^3+31\lambda+24=0$이어서 곤란하므로 문제를 $\begin{vmatrix}-2 & 0 & 1\\ -6 & -2 & 0\\ 1 & 5 & 4\end{vmatrix}$로 바로 잡는다.

   $-\lambda^3+13\lambda-12=0$, $\lambda=1,\ 3,\ -4$, $\lambda=1$일 때 $(1,-2,\ 3)^Tt(t\neq 0)$, $\lambda=3$일 때 $(1,-\frac{6}{5},\ 5)^Tt(t\neq 0)$, $\lambda=-4$일 때 $(1,3,-2)^Tt(t\neq 0)$
6. $-(\lambda-2)^3=0$, $\lambda=2$(3중근), $\lambda=2$일 때 $(1,1,-3)^Tt(t\neq 0)$
7. $(\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda+2)=0$, $\lambda=1$(중근), -1, -2, $\lambda=1$일 때 $(2,3,1,0)^Tt+(0,0,0,1)^Ts$ (단, $s^2+t^2\neq 0$), $\lambda=-1$일 때 $x_1=-2t$, $x_2=t,x_3=t$, $x_4=0$ (단, $t\neq 0$), $\lambda=-2$일 때 $(1,0,-1,0)^Tt$ (단, $t\neq 0$)
8. $(\lambda-4)^2(\lambda^2+3)=0$, $\lambda=4$(중근), $-\sqrt{3}i$, $\sqrt{3}i\lambda=4$일 때 $(1,\frac{2}{3},0,0)^Tt$ (단, $t\neq 0$), $\lambda=\sqrt{3}i$일 때$(0,0,-(2-\sqrt{3})i,1)^Tt$ (단, $t\neq 0$), $\lambda=-\sqrt{3}i$일 때 $(0,0,-(2+\sqrt{3})i,1)^Tt$ (단, $t\neq 0$)

연습문제 (8.1)

1. 

2. 

3. $\overrightarrow{m}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})$, $\overrightarrow{n}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u})$　　4. 1
5. 크기는 $\sqrt{409}$ 마일, 방향은 남쪽에서 $\sin^{-1}\frac{3}{20}$ 만큼 서쪽으로 치우친 방향
6. $v=2\cdot 40=80$

연습문제 (8.2)

1. (a) $-12i+18j$　(b) -28　(c) $-15\sqrt{13}$
2. (a) $<9,1>$　(b) -10　(c) $4\sqrt{2}$

3. (a) $\frac{-7\sqrt{2}}{10}$ (b) $-\frac{4}{5}$

4. (a) 90^o (b) $\theta=\cos^{-1}(-\frac{4}{5})$

5. (a) $-5i+2j$ (b) $-\sqrt{2}\,i+(e-\pi)j$

6. (a) $-\frac{3}{5}i-\frac{4}{5}j$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{10}i-\frac{7\sqrt{2}}{10}j$ (c) $-j$ (d) $-\frac{5}{13}i-\frac{12}{13}j$

7. $18i-24j$

8. 내적이 0이므로 직교

9. 내적이 0이므로 직교

10. $k=-4$, $m=-5$

11. $3000\cos 20^o$(줄)

12. 96(줄) 13. (a) $<12, 16>$ (b) $<-\frac{9}{5}, -\frac{12}{5}>$

14. 직선 위의 임의의 고정된 한 점을 $Q(x_1, y_1)$이라고 하면, 직선위의 임의의 점(x, y)에 대하여 $ax+by+c=0$ 및 $ax_1+by_1+c=0$이 성립하므로 첫 번째 식에서 두 번째 식을 빼면 $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$을 얻는다. 이것은 벡터 $n=ai+bj$가 직선과 수직이라는 것을 의미한다. 이 벡터를 주어진 직선의 법선벡터라고 부른다. 그런데 직선위의 고정된 한 점$Q(x_1, y_1)$에 대하여, 벡터 $\overrightarrow{QP}=(x_0-x_1)i+(y_0-y_1)j$를 법선벡터 n방향으로 정사영한 벡터의 크기가 주어진 점 P와 직선과의 최단거리임을 알 수 있다. 따라서 최단거리는 벡터 $pr_n\overrightarrow{QP}$의 크기이고 다음과 계산된다.

$$|pr_n\overrightarrow{QP}|=|\frac{n\cdot\overrightarrow{QP}}{|n|^2}|=\frac{|n\cdot\overrightarrow{QP}|}{|n|}=\frac{|(ai+bj)\cdot[(x_0-x_1)i+(y_0-y_1)]j|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{|a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|ax_0+by_0-(ax_1+by_1)|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

연습문제 (8.3)

1. 점 사이의 거리의 제곱이 $245=49+196$을 만족하므로 피타고라스정리에 의하여 직각삼각형이다.

2. (a) 1 (b) $\sqrt{5}$ (c) $\sqrt{14}$

3. y-축에 평행인 직선이며 $x=2$, $z=3$

4. (a) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5^2=25$ (b) $(x+2)^2+(y+3)^2+(z+6)^2=5$
   (c) $(x-\pi)^2+(y-e)^2+(z-\sqrt{2})^2=\pi$

5. 중심$(6,-7,4)$, 반지름 10

6. 중심 $(\frac{1}{2},-1,-2)$, 반지름 $\sqrt{5}$인

7. $(6,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,4)$를 지나는 평면(그래프생략)

8. $(8,0,0)$, $(0,\frac{8}{3},0)$을 지나고 z-축에 평행인 평면.(그래프생략)

9. $(x+3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=24$, $(x-5)^2+(y+3)^2+(z-6)^2=24$

10. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=50$

연습문제 (8.4)

1. (a) 길이 $\sqrt{21}$, 방향코사인$=<\dfrac{4}{\sqrt{21}}, \dfrac{1}{\sqrt{21}}, \dfrac{2}{\sqrt{21}}>$

   (b) 길이 $\sqrt{62}$, 방향코사인$=<\dfrac{-2}{\sqrt{62}}, \dfrac{-3}{\sqrt{62}}, \dfrac{7}{\sqrt{62}}>$

2. $\pm\dfrac{10}{593}\sqrt{593}\,i \mp \dfrac{40}{593}\sqrt{593}\,j \pm \dfrac{240}{593}\sqrt{593}\,k$ (복호동순)

3. $\overrightarrow{BA}=<6-3,\ 3-1,\ 3-(-1)>\ =\ <3,2,4>$, $\overrightarrow{BC}=\ <-1-3, 10-1, -2.5-(-1)>$ $=\ <-4,\ 9,\ -1.5>$이므로 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3(-4)+2\cdot 9+4(-1.5)=-12+18-6=0$을 만족한다. 그러므로 각B가 직각이 되어 직각삼각형이 된다.

4. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

5. (a) $\alpha\approx 143.3^o$, $\beta\approx 57.7^o$, $\gamma\approx 74.5^o$ (b) $\alpha\approx 63.7^o$, $\beta\approx 27.8^o$, $\gamma\approx 81.5^o$

6. (a) $2x-4y+3z+15=0$ (b) $3x-2y-z+4=0$

7. $2x+4y-z-9=0$

8. (a) $z=2$ (b) $2x-3y-4z+13=0$

9. $\dfrac{7}{\sqrt{11}}$ 10. 0 11. $\dfrac{6}{19}\sqrt{38}$ 12. $4x-3z=5$

연습문제 (8.5)

1. (a) $-4i-10j-4k$ (b) $-6i-36j-27k$ (c) 8 (d) $-98i-59j+88k$

2. (a) $<1,-2,3>$ (b) $i-j$ (c) -25 (d) $<14,-11,-9>$

3. $C(16i+2j-11k)$ C는 실수

4. $\pm\dfrac{1}{\sqrt{86}}<7,-1,6>$

5. $2\sqrt{74}$ 6. $\sqrt{146}$ 7. $4\sqrt{6}$ 8. $-2x+y+z=3$

9. $7x+5y+4z=-5$

10. $x-2y-2z=4$ 11. $-x+10y+17z=-3$ 12. 69 13. 4

연습문제 (8.6)

1. $\dfrac{x-4}{27}=\dfrac{y+5}{-50}=\dfrac{z-0}{-6}$

2. $\dfrac{x+8}{-10}=\dfrac{y-0}{-2}=\dfrac{z+\frac{21}{2}}{-9}$

3. $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-0}{-5}=\dfrac{z-6}{2}$

4. $\dfrac{x+5}{11}=\dfrac{y-7}{-13}=\dfrac{z+2}{3}$

5. $x=5+5t,\ t=-3-3t,\ z=4+0t=4$

6. $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+4}{-1}=\dfrac{z-5}{7}$

7. $x+y+6z=11$

8. $3x-2y=5$

9. $3x-4y+5y=-22$

연습문제 (8.8)

1. (a) $(\sqrt{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4})$ (b) $(2\sqrt{2},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{\pi}{4})$

2. (a) $(3\sqrt{3}, 3, -2)$ (b) $(-2, -2\sqrt{3}, -8)$

3. (a) $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 4\sqrt{3})$ (b) $(\sqrt{2},\ \sqrt{6},\ -2\sqrt{2})$

4. (a) $(4\sqrt{2}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$ (b) $(2\sqrt{3}, \frac{3\pi}{4},\ \cos^{-1}\frac{\sqrt{6}}{3})$

5. (a) $(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 3)$ (b) $(8, -\frac{\pi}{6}, 6)$

6. $r=\pm 3$

7. $r^2+4z^2=10$

8. $\phi=\phi_0$ 또는 $\phi=\pi-\phi_0$ (단, $\tan\phi_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 와 $0<\phi_0<\dfrac{\pi}{2}$)

9. $\rho^2\sin^2\phi+2\rho^2\cos^2\phi=4$

10. $r(\cos\theta+\sin\theta)=4$

11. $\rho^2\sin^2\phi=9$

12. $x^2-y^2=z$

13. $z=2r^2$

연습문제 (9.1)

1. $\dfrac{dy}{dx}=2\tau,\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{3\tau}$

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3\sqrt{5}}{4}\theta,\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{16\theta}$

3. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{5}{3}\sin t,\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{5}{9}\cos^3 t.$

4. $3\sqrt{13}$ 5. $6\sqrt{5}$ 6. 2π 7. $8(2\sqrt{2}-1)$ 8. $4\pi^2$

9. $x=(a-b)\cos t+b\cos(\frac{a-b}{b})t,\ y=(a-b)\sin t-b\sin(\frac{a-b}{b})t$

10. 9번의 하이포싸이클로이드에서 $b=\frac{a}{4}$이면 $a=4b$이므로 다음과 같이 된다.

$$x=(a-\frac{a}{4})\cos t+\frac{a}{4}\cos 3t,\ \text{즉},\quad x=\frac{a}{4}(3\cos t+\cos 3t)$$

$$y = (a - \frac{a}{4})\sin t - \frac{a}{4}\sin 3t, \text{ 즉, } y = \frac{a}{4}(3\sin t - \sin 3t)$$

그런데 삼각함수의 가법정리에 의하여

$$\cos 3t = \cos(2t+t) = \cos 2t \cos t - \sin 2t \sin t = (2\cos^2 t - 1)\cos t - 2\sin^2 t \cos t$$
$$= 2\cos^3 t - \cos t - 2(1-\cos^2 t)\cos t = 2\cos^3 t - \cos t - 2\cos t + 2\cos^3 t = 4\cos^3 t - 3\cos t$$
$$\sin 3t = \sin(2t+t) = \sin 2t \cos t + \cos 2t \sin t = 2\sin t \cos^2 t + (1-2\sin^2 t)\sin t$$
$$= 2\sin t(1-\sin^2 t) + (1-2\sin^2 t)\sin t = 3\sin t - 4\sin^3 t$$

가 성립하므로 하이포싸이클로이드의 매개방정식은 다음과 같이 된다는 것을 알 수 있다.

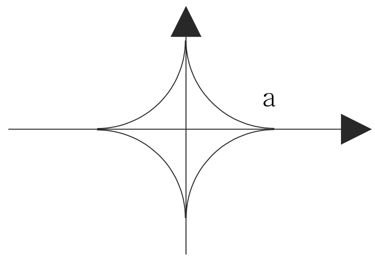
$$x = \frac{a}{4}(3\cos t + \cos 3t) = a\cos^3 t, \quad y = \frac{a}{4}(3\sin t - \sin 3t) = a\sin^3 t$$

위의 매개방정식의 각각의 양변을 a로 나누고 세제곱근을 취하면 다음과 같이 된다.

$$\sqrt[3]{\frac{x}{a}} = \cos t, \quad \sqrt[3]{\frac{y}{a}} = \sin t$$

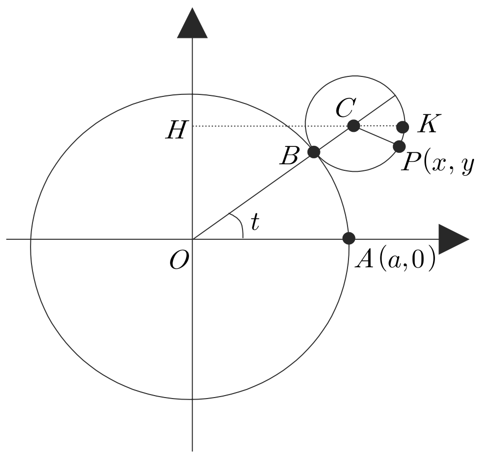
따라서 직교방정식은 다음과 같다.

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (x^{\frac{1}{3}})^2 + (y^{\frac{1}{3}})^2 = a^{\frac{2}{3}}(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^{\frac{2}{3}}$$



11. 반지름 a의 고정된 원의 중심을 직교좌표의 원점 O로 놓고, 점P의 처음 위치를 $A(a, 0)$이라고 하자. 두 원이 접하는 점을 B라고 하고, 각 AOB를 t라디안이라고 하자. 그러면 우선 큰 원에서의 호 AB의 길이는 at가 된다. 또한, 작은 원에서의 호 PB는 작은 원이 큰 원에 접하면서 굴러가므로 그 길이는 호 AB의 길이와 같은 at임을 알 수 있다. 한편 이 순간의 작은 원의 중심을 C라고 하면 원점에서 C까지의 거리는 $a+b$이므로 C의 좌표는 $((a+b)\cos t, (a+b)\sin t)$임을 알 수 있다. 그런데

$$\angle PCB = \frac{\text{호 } PB\text{의 길이}}{\text{작은 원의 둘레}} \cdot 2\pi = \frac{at}{2\pi b} \cdot 2\pi = \frac{at}{b}$$



이고, 작은 원의 중심을 지나고 x축에 평행인 직선이 y축과 만나는 점을 H, 작은 원과 만나는 점을 K라고 하면 $\angle OCH = t$(각 AOB와 엇각)이므로 다음을 알 수 있다.

$\angle PCK = \pi - (\angle PCB + \angle OCH) = \pi - (\frac{at}{b} + t)$ (각 OCH의 맞꼭지각을 고려함)

이제 작은 원 위의 점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면 다음을 얻는다.

$$x = C\text{의 } x\text{좌표} + b\cos\angle PCK = (a+b)\cos t + b\cos[\pi - (\frac{at}{b} + t)]$$

$$y = C\text{의 } y\text{좌표} - b\sin\angle PCK = (a+b)\sin t - b\sin[\pi - (\frac{at}{b} + t)]$$

그런데 $\pi - (\frac{at}{b} + t) = \pi - \frac{a+b}{b}t$이고 $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$, $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$므로 다음이 성립한다.

$$\cos[\pi - (\frac{at}{b} + t)] = \cos(\pi - \frac{a+b}{b}t) = -\cos\frac{a+b}{b}t$$

$$\sin[\pi - (\frac{at}{b} + t)] = \sin(\pi - \frac{a+b}{b}t) = \sin\frac{a+b}{b}t$$

따라서 매개 방정식은 다음과 같다.

$$x = (a+b)\cos t - b\cos\frac{a+b}{b}t, \quad y = (a+b)\sin t - b\sin\frac{a+b}{b}t$$

12. 11번의 에피싸이클로이드에서 $b = a$이면 다음과 같이 된다.

$$x = 2a\cos t - a\cos 2t, \quad y = 2a\sin t - a\sin 2t$$

두 식의 양변을 제곱하여 변끼리 더하면 다음과 같이 된다.

$x^2 + y^2 = (2a\cos t - a\cos 2t)^2 + (2a\sin t - a\sin 2t)^2$

$= 4a^2\cos^2 t - 4a^2\cos t\cos 2t + a^2\cos^2 2t + 4a^2\sin^2 t - 4a^2\sin t\sin 2t + a^2\sin^2 2t$

$= 4a^2 - 4a^2\cos t\cos 2t + a^2 - 4a^2\sin t\sin 2t$

$= 5a^2 - 4a^2(\cos t\cos 2t + \sin t\sin 2t)$

$= 5a^2 - 4a^2\cos(2t - t)$

$= 5a^2 - 4a^2\cos t$

그러므로 $\cos t = \frac{5a^2 - (x^2 + y^2)}{4a^2}$을 얻는다. 이 식을 $x = 2a\cos t - a\cos 2t$에 대입하여 t를 소거하면 다음과 같다.

$x = 2a\cos t - a\cos 2t = 2a\cos t - a(2\cos^2 t - 1) = 2a\cos t - 2a\cos^2 t + a$

$= 2a\cos t - 2a\cos^2 t + a = 2a\frac{5a^2 - (x^2 + y^2)}{4a^2} - 2a(\frac{5a^2 - (x^2 + y^2)}{4a^2})^2 + a$

$= \frac{5a^2 - (x^2 + y^2)}{2a} - \frac{1}{8a^3}(5a^2 - (x^2 + y^2))^2 + a$

이 식은 매개변수방정식 $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$에서 매개변수 t를 소거한 결과라는 것을 알 수 있다. 이제 11번 풀이과정의 그림을 참고하여, 극좌표의 극을 $A(a, 0)$이라고 하고 극축을 x축의 양의 방향이라고 하자. 이러한 극좌표의 편각을 θ라고 하면 $\theta = \pi - \angle OAP$ 가 되고 또한 동경을 r이라고 하면, 직교좌표 (x, y)와의 관계는

$$x - a = r\cos\theta, \; y = r\sin\theta$$

가 된다는 것을 그림에서 알 수 있다. 따라서 이 관계식을 위의 t가 소거된 관계식에

대입하면 다음과 같이 계산된다.

$$a+r\cos\theta=\frac{5a^2-[(a+r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2]}{2a}-\frac{1}{8a^3}(5a^2-[(a+r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2)]^2+a$$

즉,

$$r\cos\theta=\frac{5a^2-[a^2+2ar\cos\theta+r^2]}{2a}-\frac{1}{8a^3}(5a^2-[a^2+2ar\cos\theta+r^2]^2$$

$$=\frac{4a^2-2ar\cos\theta-r^2}{2a}-\frac{1}{8a^3}(4a^2-2ar\cos\theta-r^2)^2$$

$$=2a-r\cos\theta-\frac{r^2}{2a}-\frac{1}{8a^3}(16a^4+4a^2r^2\cos^2\theta+r^4-16a^3r\cos\theta-8a^2r^2+4ar^3\cos\theta)$$

$$=2a-r\cos\theta-\frac{r^2}{2a}-2a-\frac{1}{2a}r^2\cos^2\theta-\frac{1}{8a^3}r^4+2r\cos\theta+\frac{1}{a}r^2-\frac{1}{2a^2}r^3\cos\theta$$

$$=r\cos\theta-\frac{1}{2a}r^2\cos^2\theta-\frac{1}{8a^3}r^4+\frac{1}{2a}r^2-\frac{1}{2a^2}r^3\cos\theta$$

위의 양변에 $r\cos\theta$를 뺀 다음에 양변을 r^2으로 나누면 다음과 같이 된다.

$$0=-\frac{1}{2a}\cos^2\theta-\frac{1}{8a^3}r^2+\frac{1}{2a}-\frac{1}{2a^2}r\cos\theta$$

양변에 $8a^3$을 곱하면 다음과 같이 된다.

$$0=-4a^2\cos^2\theta-r^2+4a^2-4ar\cos\theta\, 0=r^2+4ar\cos\theta+4a^2(\cos^2\theta-1)$$

2차방정식의 근의 공식에 대입하여 r을 구하면 다음과 같이 된다.

$$r=-2a\cos\theta\pm\sqrt{4a^2\cos^2\theta-4a^2(\cos^2\theta-1)},\quad \text{즉,}\quad r=-2a\cos\theta\pm 2a$$

한편, $b=a$일 때의 에피싸이클로이드는 점 $A(a,0)$와 $(-3a,0)$를 지나는데 점$A(a,0)$는 우리가 선택한 극좌표로 $(0,0)$에 해당되고 점 $(-3a,0)$는 $(4a,\pi)$에 해당되므로, 이 관계를 만족하기 위해서는 복부호 중에서 양을 선택하여야 한다. 따라서 극방정식은 다음과 같다.

$$r=-2a\cos\theta+2a=2a(1-\cos\theta)$$

13. $\frac{16}{3}a$

연습문제 (9.2)

1. (a) $(1,20]$ (b) $(0,\infty)$
2. (a) $[-3,\infty)-\{4\}$ (b) $t\geqq 20$
3. (a) $(1,20]$ (b) $(0,\infty)$
4. (a) $D_t r(t)=9(3t+4)^2 i+2te^{t^2}j$, $D_t^2 r(t)=54(3t+4)i+(2+4t^2)e^{t^2})j$

   (b) $D_t r(t)=\sin 2t\, i-(\ln 3)3^t\sin 3^t j$, $D_t{}^2 r(t)=2\cos 2t\, i-(\ln 3)^2 3^t(\sin 3^t+3^t\cos 3^t)j$
5. (a) $r'(t)=-2te^{-t^2}i+(\ln 2)2^t j$, $r''(t)=(-2+4t^2)e^{-t^2}i+(\ln 2)^2 2^t j$

   (b) $r'(t)=2\sec^2(2t)i+\frac{1}{1+t^2}j$, $r''(t)=8\sec^2(2t)\tan(2t)i-\frac{2t}{(1+t^2)^2}j$
6. $(e-1)i+(1-e^{-1})j$

7. $\frac{8\sqrt{2}}{5}(i+j)$

8. $v(t)=-32tj,\ r(t)=-16t^2j$

9. $v(t)=i+(\frac{1}{2}t^2+2)j,\ r(t)\ =ti+(\frac{1}{6}t^3+2t)j$

10. $v(t)=(t+2)i+(2-e^{-t})j,\ r(t)=(\frac{1}{2}t^2+2t+1)i+(2t+e^{-t})j$

11. $v(t)=(1-\sin t)i+(1-\cos t)j,\ r(t)=(t+\cos t)i+(t-\sin t+3)j$

연습문제 (9.3)

1. $T(\frac{1}{3})=\frac{1}{\sqrt{13}}(3i+2j),\ \kappa=\frac{18}{13^2}\sqrt{13}$

2. $T(\frac{1}{2})=\frac{i+j}{\sqrt{2}},\ \kappa(\frac{1}{2})=\frac{1}{4\sqrt{2}}$

3. $T(\frac{\pi}{4})=\frac{-3i+4j}{5},\quad \kappa(\frac{\pi}{4})=\frac{24\sqrt{2}}{125}$

4. $T(1)=\frac{-2i-3j}{\sqrt{13}},\quad \kappa(1)=\frac{6}{13\sqrt{13}}$

5. $T(1)=\frac{(\cos 1-\sin 1)i+(\sin 1+\cos 1)j}{\sqrt{2}},\quad \kappa(1)=\frac{3}{2\sqrt{2}}$

6. $\kappa=\frac{4}{17\sqrt{17}},\ R=\frac{17\sqrt{17}}{4}$

7. $\kappa(0)=2,\ R=\frac{1}{2}$

8. $\kappa=\frac{1}{4},\ R=4$

9. $\kappa=\frac{2}{5\sqrt{5}},\ R=\frac{5\sqrt{5}}{2}$

10. $(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\ln 2)$

11. $(\pm\frac{\pi}{2},\pm 1)$(복호동순)

12. $(-\frac{1}{2}\ln 2,\ \frac{1}{\sqrt{2}})$

13. $a_T=\frac{12t}{\sqrt{1+4t^2}},\ a_N^2=36(1-\frac{4t^2}{1+4t^2}),\ a_T(\frac{1}{3})=\frac{12}{\sqrt{13}},\ a_N(\frac{1}{3})=\frac{18}{\sqrt{13}}$

14. $a_T=\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\ ,\ a_N^2=4(1-\frac{t^2}{1+t^2}),\ a_T(1)=\sqrt{2},\ a_N(\frac{1}{3})=\sqrt{2}$

15. $a_T=\frac{2a\sinh t\cosh t}{\sqrt{\sinh^2 t+\cosh^2 t}},\ a_N=a\frac{\cosh^2 t-\sinh^2 t}{\sqrt{\sinh^2 t+\cosh^2 t}},\ a_T(\ln 3)=\frac{40a}{3\sqrt{41}},$

$a_N(\ln 3)=\frac{3a}{\sqrt{41}}$

16. $a_T = \dfrac{e^{2t} - e^{-2t}}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}$, $a_N = \dfrac{2}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}}$, $a_T(0) = 0$, $a_N(0) = \sqrt{2}$

17. $a_T = \sqrt{2}\,e^t$, $a_N = \sqrt{2}\,e^t$, $a_T(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{3}} = a_N(\frac{\pi}{3})$

연습문제 (9.4)

1. 속도 $\vec{v}(1) = 4i + 10j + 2k$, 속력 $|v|(1) = 2\sqrt{30}$, 가속도 $\vec{a}(1) = 10j$

2. 속도 $\vec{v}(2) = -\dfrac{1}{4}i - \dfrac{4}{9}j + 80k$, 속력 $|v|(2) = \dfrac{\sqrt{8294737}}{36}$,

   가속도 $\vec{a}(2) = \dfrac{1}{4}i + \dfrac{26}{27}j + 160k$

3. 속도 $\vec{v}(\pi) = -j + k$, 속력 $|v|(\pi) = \sqrt{2}$, 가속도 $\vec{a}(\pi) = i$

4. 속도 $\vec{v}(2) = 2\pi i + j - e^{-2}k$, 속력 $|v|(2) = \sqrt{1 + 4\pi^2 + e^{-4}}$,

   가속도 $\vec{a}(\pi) = 2\pi i - 2\pi^2 j + e^{-2}k$

5. $2\sqrt{2}$　　6. $\sqrt{41}$　　7. $\dfrac{1}{2}\sqrt{5}(e^{2\pi} - 1)$

8. $T = \dfrac{2i + j}{\sqrt{5}}$, $a_T = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$, $a_N = \dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$, $N = \dfrac{i - 2j + 5k}{\sqrt{30}}$, $\kappa = \dfrac{\sqrt{6}}{10\sqrt{5}}$, $B = \dfrac{i - 2j - k}{\sqrt{6}}$

9. $T = \dfrac{-3i + 2k}{\sqrt{13}}$, $a_T = 0$, $a_N = 63$, $N = j$, $\kappa = \dfrac{9}{91}$, $B = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(-2i - 3k)$

10. $T = \dfrac{-i + j + \sqrt{2}\,k}{2}$, $a_T = 0$, $a_N = 4\sqrt{2}$, $N = \dfrac{i + j}{\sqrt{2}}$, $\kappa = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $B = \dfrac{1}{2}(-i + j - \sqrt{2}\,k)$

11. $T = \dfrac{i + 6j + 8k}{\sqrt{101}}$, $a_T = \dfrac{63}{4\sqrt{101}}$, $a_N = \dfrac{\sqrt{649}}{2\sqrt{101}}$, $N = \dfrac{-82i - 189j + 152k}{\sqrt{101}\sqrt{649}}$,

    $\kappa = \dfrac{2\sqrt{649}}{101\sqrt{101}}$, $B = \dfrac{1}{\sqrt{649}}(24i - 8j + 3k)$

12. $a_T = \dfrac{4t}{\sqrt{10 + 4t^2}}$, $a_N = \dfrac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10 + 4t^2}}$

13. $a_T = \dfrac{-e^{-2t} + e^{2t}}{\sqrt{e^{-2t} + 4 + e^{2t}}}$, $a_N = \dfrac{2\sqrt{e^{2t} + 1 + e^{-2t}}}{\sqrt{e^{-2t} + 4 + e^{2t}}}$

14. $a_T = \dfrac{5t}{\sqrt{1 + 5t^2}}$, $a_N = \sqrt{\dfrac{8 + 16t^2 + 5t^4}{1 + 5t^2}}$

15. $T = \dfrac{i + 2j + 2k}{3}$, $a_T = 4$, $a_N = 2$, $N = \dfrac{-2i - j + 2k}{3}$, $B = \dfrac{2i - 2j + k}{3}$

16. $T = \dfrac{-i - \pi j + 2\pi k}{\sqrt{1 + 5\pi^2}}$, $a_T = \dfrac{5\pi}{\sqrt{1 + 5\pi^2}}$, $a_N = \sqrt{\dfrac{8 + 16\pi^2 + 5\pi^4}{1 + 5\pi^2}}$,

    $N = \dfrac{(6\pi + 5\pi^3)i + (-2 - 5\pi^2)j + 2k}{\sqrt{1 + 5\pi^2}\sqrt{8 + 16\pi^2 + 5\pi^4}}$

    $B = \dfrac{1}{(1 + 5\pi^2)\sqrt{8 + 16\pi^2 + 5\pi^4}}[(2\pi + 10\pi^3)i + (2 + 12\pi^2 + 10\pi^4)j + (2 + 11\pi^2 + 5\pi^4)k]$

17. $T=\dfrac{2i+(1+\sqrt{3})j+(1-\sqrt{3})k}{2\sqrt{3}}$, $a_T = \sqrt{3}\,e^{\frac{\pi}{3}}$, $a_N = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{3}}$,

$N=\dfrac{(1-\sqrt{3})j-(1+\sqrt{3})k}{2\sqrt{2}}$, $\quad B=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}[-4i+(1+\sqrt{3})j+(1-\sqrt{3})k]$

연습문제 (10.1)

1. (a) 1/3 (b) 1 (c) 0 (d) 0 (e) 0

2. (a) 1 (b) 1/2 (c) 수렴하지 않음(발산)

3. $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$

4. (a) $\{f_n\}=\{1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,\cdots\}$

(b) $n=1$일 때 $\dfrac{1}{\sqrt{5}}[(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^1-(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^1]=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{5}=1=f_1$이 되고,

$$\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1]=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1-(\frac{1-5}{2(1+\sqrt{5})})^1]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1-(-1)(\frac{2}{1+\sqrt{5}})^1]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[\phi^1-(-1)^1\phi^{-1}]$$

이므로 성립한다. $n=2$일 때에는

$$\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2]=\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}-\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4})=1=f_2$$

이 되고,

$$\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2]=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2-(\frac{1-5}{2(1+\sqrt{5})})^2]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2-(-1)^2(\frac{2}{1+\sqrt{5}})^2]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[\phi^2-(-1)^2\phi^{-2}]$$

이므로 역시 성립한다. 이제 수학적 귀납법으로 모든 자연수에 대하여 성립함을 증명하기로 한다. 우선 위의 증명에 의하여 $n=1$일 때에는 성립한다. $k\leqq n$을 만족하는 모든 자연수 k에 대하여 성립한다고 가정하면 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]=f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[\phi^n-(-1)^n\phi^{-n}]$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}]=f_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}[\phi^{n-1}-(-1)^{n-1}\phi^{-n+1}]$$

위의 등식을 변끼리 더하면 다음을 얻는다.

$$\text{좌변}=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]+\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n+(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}]-\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n[1+(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{-1}] - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n[1+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{-1}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n[1+(\frac{1-5}{2(1-\sqrt{5})})^{-1}] - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n[1+(\frac{1-5}{2(1+\sqrt{5})})^{-1}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n[1+(\frac{-2}{(1-\sqrt{5})})^{-1}] - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n[1+(\frac{-2}{(1+\sqrt{5})})^{-1}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n[1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}] - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n[1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]$$

중간$= f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$

우변$= \frac{1}{\sqrt{5}}[\phi^n - (-1)^n\phi^{-n}] + \frac{1}{\sqrt{5}}[\phi^{n-1} - (-1)^{n-1}\phi^{-n+1}]$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}[\phi^n + \phi^{n-1}] - \frac{1}{\sqrt{5}}[(-1)^n\phi^{-n} + (-1)^{-n+1}\phi^{-n+1}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^n[1+\phi^{-1}] - \frac{1}{\sqrt{5}}(-1)^n\phi^{-n}[1+(-1)^1\phi^1]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^n[1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}] - \frac{1}{\sqrt{5}}(-1)^n\phi^{-n}[1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^n[1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}] - \frac{1}{\sqrt{5}}(-1)^n\phi^{-n}[\frac{1-\sqrt{5}}{2}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^n\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}(-1)^n\phi^{-n}\frac{1-5}{2(1+\sqrt{5})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}(-1)^n\phi^{-n}(-1)\frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}(-1)^n\phi^{-n}(-1)\phi^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}[\phi^{n+1} - (-1)^{n+1}\phi^{-(n+1)}]$$

이것은 $k = n+1$일 때에 성립한다는 것을 의미하므로 수학적귀납법에 의하여 모든 자연수에 대하여 성립한다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}[\phi^{n+1} - (-1)^{n+1}\phi^{-(n+1)}]}{\frac{1}{\sqrt{5}}[\phi^n - (-1)^n\phi^{-n}]} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\phi[\phi^n - (-1)^{n+1}\phi^{-n-2}]}{\frac{1}{\sqrt{5}}[\phi^n - (-1)^n\phi^{-n}]}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\phi[1-(-1)^{n+1}\phi^{-2n-2}]}{[1-(-1)^n\phi^{-2n}]} = \frac{\phi(1-0)}{1-0} = \phi \quad (\because \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1)$$

(c) $\phi = \lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to\infty}(\frac{f_n + f_{n-1}}{f_n}) = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{f_{n-1}}{f_n}) = \lim_{n\to\infty}1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{f_n}{f_{n-1}}}) = 1 + \frac{1}{\phi}$ 이

므로 양변에 ϕ를 곱하여 정리하면 $\phi^2-\phi-1=0$이 되므로 ϕ는 $x^2-x-1=0$의 해이다. 그리고 이차방정식의 근의 공식을 이용하면 두 근은 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$이므로 $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$와 $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{1-5}{2(1+\sqrt{5})}=-\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}=-\dfrac{1}{\phi}$임을 알 수 있다.

연습문제 (10.2)

1. (a) 1/6 (b) 1/6 (c) 1 (d) $\dfrac{e}{\pi-e}$ (e) 발산

2. 1 3. $\dfrac{1}{1+x}$

4. 매회 나누어서 가지는 순간마다 세 명이 가지고 있는 사과의 양은 같다는 것을 알 수 있다. 그러므로 한 명이 최종적으로 가지게 될 사과의 양만을 계산하면 된다. 매회 마다 한 사람이 사과를 더 가지게 되는 양은 바로 전회에서 갖게 되는 양의 $\dfrac{1}{4}$이므로 제 n회까지 받은 사과의 전체양은 $S_n=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{4})^k$이 된다는 것을 알 수 있다. 따라서 최종적으로 받게 되는 사과의 양은 세 사람 모두 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{4})^k=\dfrac{1/4}{1-1/4}=\dfrac{1}{3}$이 된다.
(물론 시간의 개념을 무시하는 경우에 한하여 그렇다.)

5. 정사각형 전체

6. $\dfrac{1}{3}(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4})a^2\div(\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2)=\dfrac{4}{3\sqrt{3}}(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4})$

7. 제논의 역설은 시간개념을 무시한 결과이며, 설사 시간개념을 도입하였더라도, 아킬레우스가 거북이 있던 위치에 도달하는 시간을 거의 같은 것으로 간주한 것이므로 모순이다. 실제로는 거북이 있던 위치에 도달하는 시간은 기하급수적으로 줄어들기 때문에 모든 시간을 합쳐도 유한한 시간밖에 되지 않는다. 한편, 아킬레우스가 거북을 따라잡는 거리를 계산하기 위하여 거북의 속도를 v라고 하면 아킬레우스의 속도는 $10v$가 된다. 시간 t동안에 이동한 거리를 계산하여보면 각각 $100+vt$, $10vt$가 되므로 $100+vt=10vt$, 즉, $9vt=100$, 즉, $vt=\dfrac{100}{9}$를 만족하는 하는 순간에 따라잡게 된다. 그리고 이 조건을 만족하는 동안에 아킬레우스가 이동한 거리는 $10vt=10\cdot\dfrac{100}{9}=\dfrac{1000}{9}$(야드)가 된다.

8. (a) 60마일 (b) 60마일

연습문제 (10.3)

1. 3 2. 0 3. e^4 4. 발산 5. 1
6. 1 7. 0 8. 발산 9. 1 10. 3/2
11. 발산 12. 발산 13. $\dfrac{1}{e^2-1}$ 14. 12 15. $\dfrac{91}{99}$
16. 발산 17. 수렴 18. 수렴 19. 발산(적분판정 및 비교판정)

20. 수렴(적분판정 및 비교판정)
21. 발산(적분판정 및 비교판정)
22. 발산(일반항판정)
23. 수렴(공비<1)
24. 수렴(비판정)
25. 발산(일반항 판정)
26. 수렴(적분판정 및 비교판정)
27. 수렴(비판정)
28. 수렴(비판정)
29. 발산(비판정)
30. 발산(일반항판정)
31. 수렴(근판정)
32. 발산(적분판정 및 비교판정)

연습문제 (10.4)

1. 조건부수렴급수 2. 절대수렴 3. 발산 4. 발산 5. 조건부수렴
6. 절대수렴 7. 절대수렴 8. 조건부수렴 9. 조건부수렴 10. 발산
11. 조건부수렴 12. 절대수렴 13. 절대수렴 14. 발산

연습문제 (10.5)

1. $[-1, 1]$ 2. $(-\infty, \infty)$ 3. $(-\infty, \infty)$ 4. $(-\infty, \infty)$ 5. $(-1, 1)$
6. $(-1, 1)$ 7. $(-1, 1]$ 8. $[-1, 1)$ 9. $[-1, 1]$ 10. $[-1, 1]$
11. $(-2, 2)$ 12. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 13. $(-\infty, \infty)$ 14. $(-1, 1)$ 15. $[0, 2)$
16. $(-\infty, \infty)$ 17. $(-3, 1)$ 18. $[1, 3]$ 19. $[-6, -4]$ 20. $(-4, -2)$
21. $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^n + \cdots \ (R=1)$
22. $\dfrac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}nx^{n-1} + \cdots \ (R=1)$
23. $\dfrac{1}{(1-x)^3} = \dfrac{1}{2}[2 + 3 \cdot 2x + 4 \cdot 3x^2 + \cdots + n(n-1)x^{n-2} + \cdots\ ] \ (R=1, n=2, 3, \cdots)$
24. $\dfrac{x}{(1+x)^2} = x - 2x^2 + 3x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}nx^n + \cdots \ (R=1)$
25. $\dfrac{1}{2-3x} = \dfrac{1}{2}[1 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3^2}{2^2}x^2 + \cdots + \dfrac{3^n}{2^n}x^n + \cdots] \ (|x| < \dfrac{2}{3},\ R = \dfrac{2}{3})$
26. $\dfrac{1}{1+2x} = 1 - 2x + 2^2x^2 - \cdots + (-1)^n 2^n x^n + \cdots] \ (R = \dfrac{1}{2})$
27. $\dfrac{x^2}{1+x^4} = x^2 - x^6 + x^{10} - \cdots + (-1)^n x^{4n+2} + \cdots \ (R=1)$
28. $\dfrac{x^3}{2-x^3} = \dfrac{1}{2}[x^3 + \dfrac{x^6}{2} + \dfrac{x^9}{2^2} + \cdots + \dfrac{x^{3n+3}}{2^n} + \cdots\ ] \ (R = \sqrt[3]{2})$

29. $\int_0^x \ln(1+t)dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{3\cdot 4}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}x^{n+2} + \cdots$ $(R=1)$

30. $\int_0^x \tan^{-1}t\,dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3\cdot 4}x^4 + \frac{1}{5\cdot 6}x^6 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2} + \cdots$ $(R=1)$

31. $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + \cdots$ $(R=\infty)$

32. $xe^{x^2} = x[1 + (x^2) + \frac{(x^2)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x^2)^n}{n!} + \cdots] = x + x^3 + \frac{x^5}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{n!} + \cdots$ $(R=\infty)$

33. $e^x + e^{-x} = 2[1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots]$ $(R=\infty)$

34. $e^{2x} - 1 - 2x = \frac{2^2x^2}{2!} + \cdots + \frac{2^nx^n}{n!} + \cdots$ $(R=\infty)$

35. (a) $\frac{x}{1+x}$ (b) $f(x) = \frac{1}{x^2}(e^x - 1 - x)\,(x \neq 0)$, $f(0) = 0$

(c) $\ln(1-2x)$ (단, $|x| < \frac{1}{2}$)

36. $\frac{x}{(1-x)^2}$ 37. $\frac{2x}{(1-x)^3}$.

연습문제 (10.6)

1. $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{37}{79380}x^9 + \cdots$

2. $x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{60}x^5 + \cdots$

3. $x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{13}{120}x^7 - \cdots$

4. $5x^2 - \frac{35}{6}x^4 + \frac{55}{24}x^6 - \cdots$

5. $1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{128}x^4 - \frac{3}{256}x^5 + \cdots$

6. $1 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 - \frac{4}{81}x^6 - \cdots$

7. $e^x = e^1 + e^1(x-1) + \frac{e^1}{2!}(x-1)^2 + \frac{e^1}{3!}(x-1)^3 + \cdots$

8. $\sin x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{4}(x - \frac{\pi}{6})^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}(x - \frac{\pi}{6})^3 + \cdots$

9. $\cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{4}(x - \frac{\pi}{3})^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}(x - \frac{\pi}{3})^3 + \cdots$

10. $\tan x = 1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) + 2(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{8}{3}(x - \frac{\pi}{4})^3 + \cdots$

11. $f(x) = 1 + x^2 + x^3 = 3 + 5(x-1) + 4(x-1)^2 + (x-1)^3$

12. $f(x) = 2 - x + 3x^2 - x^3 = 7 - 10(x+1) + 6(x+1)^2 - (x+1)^3$

연습문제 (11.2)

1. -18 2. 3 3. $2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 4. $-\dfrac{5}{2}$ 5. $\dfrac{1}{3}$

6. 1 7. 없다 8. 0 9. $S=R^2$ 10. $\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$

11. $R^2-\{(x,y)|y=x^2\}$ 12. $S=R^2$

연습문제 (11.4)

1. $\dfrac{8}{5}$ 2. $8\sqrt{2}$ 3. $\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ 4. $\dfrac{-27}{5}\sqrt{5}$ 5. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

6. $-\dfrac{(1+\sqrt{3})}{2}e$ 7. $\dfrac{52}{3}$ 8. $\sqrt{2}-1$

9. $\dfrac{1}{13}(12i-5j)$방향, 13

10. $(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2})$방향, 1

11. $\dfrac{1}{\sqrt{21}}(-4,\ 2,\ -1)$방향, $\sqrt{21}$

12. $\dfrac{1}{\sqrt{65}}(1,\ -8,\ 0)$방향, $\sqrt{65}$

13. $-\dfrac{1}{\sqrt{20}}(2,\ -4)$방향, $-\dfrac{\sqrt{5}}{10}$

14. $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\dfrac{3}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}})$방향, $-\sqrt{5}$

15. 등고선은 $y=2x^2$, $\nabla f(1,2)=(-4,1)$, $\overrightarrow{(1,2)(-3,3)}$는 $y=2x^2$의 법선벡터

연습문제 (11.6)

1. $12t^{11}$

2. $-2\cos t\sin^2 t+\sin^3 t+\cos^3 t-2\cos^2 t\sin t$

3. $e^x(3\sin y+2\cos y)+e^y(3\cos x+2\sin x)$

4. $\cot t-\tan t$

5. $7t^6\cos(t^7)$

6. $-4t^3+2t-1$

7. $2s^3t-3s^2t^2$

8. $-\dfrac{2s^2}{t^3}+s^2-(\ln\dfrac{s}{t})s^2$

9. $e^{s^2\sin^2 t+t^2\sin^2 s}[2s^2\sin t\cos t+2t\ \sin^2 s]$

10. $\dfrac{2(st-1)e^{st}e^s}{t^2e^{2s}-e^{2st}}$

11. $\dfrac{1}{\sqrt{1+s^4t^2}}(s^4t)$

12. 0
13. 0
14. 5
15. $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\pi$

연습문제 (11.8)

1. $(2,0)$ 극소점
2. $(1,-1)$ 극소점
3. $(0,0)$은 안장점, $(\pm\frac{1}{2},0)$은 극소점
4. 임계점 $(3,\pm 6),(0,0)$, $(3,-6)$은 안장점, $(3,6)$도 안장점, $(0,0)$은 극대점
5. $(0,0)$ 안장점
6. 임계점 $(0,0),(2,2)$, $(0,0)$은 안장점, $(2,2)$는 극소점
7. $(1,2)$ 극소점
8. $(0,2)$는 극대점
9. $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$는 극대점
10. $a=0$인 경우 : $(0,b)(-\pi<b<\pi)$에서 극소, $a\neq 0$인 경우 : 임계점 $(0,\pm\frac{\pi}{2})$, $(a,0)$,

$(0,\pm\frac{\pi}{2})$은 안장점, $(a,0)$은 극소점

11. $f(\pm\sqrt{3},\pm\sqrt{3})=6$
12. 3
13. 5
14. -18
15. $\frac{72}{7}$
16. -3
17. 치수 $(4,4,2)$, 부피32
18. $\frac{2\sqrt{14}}{7}$
19. $10\sqrt{5}$
20. $\min\left\{3,\ \sqrt{3}(\frac{9}{2})^{1/3},\ \sqrt{10}\right\}=\sqrt{3}(\frac{9}{2})^{1/3}$

연습문제 (12.2)

1. 14 2. 4 3. 12 4. 13 5. 2
6. 44 7. 7 8. 26 9. 168 10. 120
11. 520 12. 120 13. $\frac{32}{3}$ 14. $\frac{115}{6}$ 15. $\frac{55}{4}$

16. $\frac{16}{3}$ 17. 1 18. 2 19. $\frac{\pi}{2}-1$ 20. $e-2$

21. $\frac{4}{15}[31-9\sqrt{3}]$ 22. $-\ln 2+1$

연습문제 (12.3)

1. -40 2. 55 3. $\frac{189}{2}$ 4. 33750 5. $\frac{2}{3}$

6. $\frac{1}{3}$ 7. 156 8. $-\frac{\pi}{8}$

9. (그림생략) $\int_0^1\int_0^3\int_0^{\frac{1}{6}(12-3x-2y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

10. (그림생략) $\int_0^3\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

11. (그림생략) $\int_0^2\int_0^4\int_0^{\frac{1}{2}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

12. (그림생략) $\int_0^{\frac{3}{2}}\int_0^4\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

13. (그림생략) $\int_0^{\frac{12}{5}}\int_{x/3}^{\frac{4-x}{2}}\int_0^{4-x-2z} f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx$

14. (그림생략) $\int_0^1\int_0^{\sqrt{z}}\int_0^{y^2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

15. (그림생략) $\int_0^3\int_{\frac{2}{3}x}^{-\frac{1}{3}x+3}\int_0^{\frac{1}{9}(18-2x-6y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

16. (그림생략) $\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{9-x^2-y^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

17. (그림생략) $\int_0^4\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}} f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx$

18. (그림생략) $\int_0^1\int_{\sqrt{2y-y^2}}^{y}\int_0^3 f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$

연습문제 (12.5)

1. 1/12 2. $\frac{1}{8}[\pi-18+\sin 18]$ 3. 4/9 4. 4/3

5. $2[\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}]$ 6. $\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$ 7. $\frac{\pi}{8}a^2$ 8. 54π

9. 작은매듭넓이$=4(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2})$, 큰고리넓이$=4(2\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2})$

10. $\frac{\sqrt{65}}{2}-2\cos^{-1}\frac{4}{9}$

11. $\pi(e^4-1)$ 12. $\frac{2}{3}\pi$ 13. $\frac{\ln 2}{8}\pi$ 14. $\frac{7}{3}$

15. $\frac{2-\sqrt{3}}{2}\pi$ 16. $\frac{1-\cos 1}{4}\pi$

연습문제 (13.1)

1. $14(2\sqrt{2}-1)$ 2. $\frac{1}{450}(26\sqrt{26}-1)$ 3. $2\sqrt{5}$

4. $\sqrt{5}\,e(e-3)$ 5. $\frac{1}{6}(14\sqrt{14}-1)$ 6. $40(4\pi+3\pi^3)$

연습문제 (13.2)

1. $-\frac{7}{44}$ 2. $\frac{618}{5}$ 3. $-\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ 4. $\frac{3}{2}$ 5. $2-\frac{2}{\pi}$

6. $\frac{412}{15}$ 7. $\frac{100}{3}$ 8. 60 9. 144 10. $\frac{828}{35}$

11. 0 12. 1 13. $\frac{17}{6}$

14. $\frac{1}{4}e^4+\frac{1}{2}e^{-2}-e+\frac{2}{3}e^3-\frac{5}{12}$

15. 19

연습문제 (13.3)

1. $-\frac{64}{15}$ 2. $-\frac{3\sqrt{2}}{5}$ 3. $\frac{72}{35}$ 4. $\frac{1}{3}$ 5. 0 6. 72

연습문제 (13.4)

1. $\frac{8}{3}$ 2. $\frac{2}{3}$

3. $F(x,y)=M(x,y)i+N(x,y)j$가 벡터장이고, C가 $xy-$평면에 놓여있는 매끄러운 단순 폐곡선이라고 하자. C의 호의 길이 s에 대한 매개방정식 $x=x(s)$, $y=y(s)$가 C에 반시계방향을 준다고 하면 $T=\frac{dx}{ds}i+\frac{dy}{ds}j$는 곡선 C의 단위접선벡터이며, $T=\frac{dx}{ds}i+\frac{dy}{ds}j$ 는 C에 의하여 둘러싸인 영역 S의 반대방향을 가리키는 단위 법선벡터이다. 그러므로 그린의 정리에 의하여 다음을 얻는다.

$$\oint_C F\cdot n\,ds=\oint_C (Mi+Nj)\cdot\left(\frac{dy}{ds}i-\frac{dx}{ds}j\right)ds=\oint_C\left(M\frac{dy}{ds}-N\frac{dx}{ds}\right)ds$$
$$=\oint_C (M\,dy-N\,dx)=\iint_S\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)dA$$

한편 정의 13.2에 의하여 다음을 얻는다.

$$\oint_C F\cdot\ T\,ds=\oint_C (Mi+Nj)\cdot\left(\frac{dx}{ds}i+\frac{dy}{ds}j\right)ds=\oint_C\left(M\frac{dx}{ds}+N\frac{dy}{ds}\right)ds$$

$$= \oint_C (Mdx + Ndy) = \oint_C F \cdot dr$$

(a) 0 (b) 0

4. (a) $b-a$ (b) 0 5. (a) 0 (b) 0 6. (a) 0 (b) 2π

연습문제 (13.5)

1. 0 2. 6 3. $\frac{3}{4}a^2b^2c^2$ 4. 180π 5. $\frac{64}{3}\pi$

6. 56π 7. 4π 8. 64 9. 1176π 10. 12π