# 연습문제 해답

## 제 1장 연습문제

### 연습문제(1.1)

1.

(1) 1계 1차 상미분방정식 (2) 3계 1차 상미분방정식 (3) 2계 1차 편미분방정식
(4) 1계 1차 상미분방정식 (5) 4계 1차 상미분방정식 (6) 2계 1차 상미분방정식
(7) 4계 1차 상미분방정식 (8) 2계 1차 편미분방정식 (9) 6계 1차 상미분방정식
(10) 1계 6차 상미분방정식

2.

(1) 2계 선형미분방정식 (2) 1계 비선형미분방정식 (3) 2계 비선형미분방정식
(4) 3계 선형미분방정식 (5) 3계 비선형미분방정식 (6) 2계 비선형미분방정식
(7) 2계 선형미분방정식 (8) 3계 선형미분방정식 (9) 3계 비선형미분방정식
(10) 1계 비선형미분방정식

### 연습문제(1.2)

1. 증명문제
2. 증명문제

### 연습문제(1.3)

1.

(1) $R=\{(x,y)\mid y>0\}$
(2) $R=\{(x,y)\mid x>0,\ y>0\}$ 또는 $R=\{(x,y)\mid x<0,\ y<0\}$
(3) $R=\{(x,y)\mid x>0\}$ 또는 $R=\{(x,y)\mid x<0\}$
(4) $R=$ 평면전체
(5) $R=\{(x,y)\mid y<-2\}$ 또는 $R=\{(x,y)\mid -2<y<2\}$ 또는 $R=\{(x,y)\mid y>2\}$
(6) $R=\{(x,y)\mid y<-1\}$ 또는 $R=\{(x,y)\mid y>-1\}$
(7) $R=\{(x,y)\mid x\neq 0,\ y\neq 0\}$
(8) $R=\{(x,y)\mid x>y\}$ 또는 $R=\{(x,y)\mid x<y\}$
(9) $R=$ 평면전체
(10) $R=\{(x,y)\mid x>1\}$ 또는 $R=\{(x,y)\mid x<1\}$

2.

(1) 두 개의 해 $y=0$과 $y=x^3$이 존재함

(2) 두 개의 해 $y=0$과 $y=x^2$이 존재함

3.

(1) 점 $(1, 4)$에서 유일한 해를 갖는다.

(2) 점 $(5, 3)$에서 유일한 해를 갖는다.

(3) (1) 점 $(2, -3)$에서 두 개 이상의 해를 갖는다.

(4) $(-1, 1)$에서 해가 존재하지 않는다.

4.

(1) $y=\frac{3}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}$ (2) $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{2-x})$ (3) $y=5e^{-(x+1)}$ (4) $y=0$

## 제 2장 연습문제

### 연습문제 (2.1)

1.

(1) $y=\frac{1}{3}(x+1)^3+c$ (2) $y=-\frac{1}{x}+c$ (3) $y=-2(x+1)e^{-x}+c$

(4) $y=ce^{-x^2}$ (5) $y=cx-1$ (6) $\ln|y|+y^2=-\cos x+c$

(7) $ye^y-e^y+e^{-x}+\frac{1}{3}e^{-3x}=c$

(8) $y-\frac{1}{y}=\tan^{-1}x+c$ (9) $\frac{1}{2}y^2-y+\ln|y+1|=-\frac{1}{x}+c$

(10) $\frac{2}{2y+3}=\frac{1}{4x+5}+c$

(11) $\ln|Q-70|=kt+c$ (12) $\ln|N|=(t-1)e^{t+2}-t+c$

(13) $y^2=-\frac{1}{6}\sec^2 3x+c$ (14) $\ln|\sec y|=x\sin x+\cos x+c$

(15) $(1+y^2)^{1/2}=(1+x^2)^{1/2}+c$ (16) $y^2=x^2+x+c$

(17) $y+2\ln|y-1|=x+5\ln|x-3|+c$ (18) $\frac{1}{2}\ln|\csc 2y-\cot 2y|=\sin x+c$

(19) $\sqrt{y^2+4}=\sin^{-1}\frac{x}{2}+c$ (20) $\sqrt{y}+1=c(\sqrt{x}+1)$

2. (1) $\tan^{-1}2y + \tan^{-1}x^2 = \frac{\pi}{4}$ (2) $y = 3e^{-(x-1)^2/2}$ (3) $y = x$

(4) $y = 2e^{-2x} + \frac{1}{2}$

3. (1) $y = 1$ (2) $y = 0$ (3) $y = 1$

**연습문제 (2.2)**

1.

(1) 완전미분방정식이고 해는 $x^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + 7y = c$이다.

(2) 완전미분방정식이고 해는 $x\sin y + y\cos x - \frac{1}{2}y^2 = c$이다.

(3) 완전미분방정식이 아니다.

(4) 완전미분방정식이고 해는 $y(\ln x - 1) + x\ln x = c$이다.

(5) 완전미분방정식이고 해는 $\frac{1}{4}x^4 + xy^3 = c$이다.

(6) 완전미분방정식이고 해는 $x^2 = cy$이다.

(7) 완전미분방정식이고 해는 $x^3y + xe^y - y^2 = c$이다.

(8) 완전미분방정식이고 해는 $e^y xy^2 \cosh x = c$이다.

(9) 완전미분방정식이고 해는 $-2xy + \frac{5}{2}y^2 = c$이다.

(10) 완전미분방정식이고 해는 $x\sin 3x - 3x + y^2 + y = c$이다.

(11) 완전미분방정식이고 해는 $y\sin^2 x - xy + 2e^{xy^2} = c$이다.

(12) 완전미분방정식이고 해는 $\ln|x| - \frac{1}{x}\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + (y-1)e^y = c$이다.

2.

(1) $e^x + (x+2)y + 2y + (y-1)e^y = 3$ (2) $\frac{x^2}{4y^4} - \frac{3}{2y^2} = -\frac{5}{4}$

(3) $xy^2 - y\cos x - \tan^{-1}y = -1 - \frac{\pi}{4}$

(4) $y^2\sin x - x^3y - x^2 + y\ln y - y = 0$

3. (1) $k = 10$ (2) $k = -1$ (3) $k = 1$ (4) $k = 9$

4. $M(x, y) = ye^{xy} + y^2 - \frac{y}{x^2}$

5. $N(x,y)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{1}{2(x^2+y)}$

**연습문제 (2.3)**

1.

(1) $3x^2y^3+y^4=c$ (2) $\frac{y}{x}+\ln|y|=c$ (3) $x^2y^2\cos x=c$

(4) $xye^x+y^2e^x=c$ (5) $x^2y^2+x^3=c$ (6) $x^2+y^2=c(x+y)$

2.

(a) $M(x,y)=4x+3y^2$, $N(x,y)=2xy$에서 $M_y=6y\neq 2y=N_x$이다.

(b) $f(x)=\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{4y}{2xy}=\frac{2}{x}$이므로, 적분인자는 $\mu(x)=e^{\int f(x)dx}=e^{\ln x^2}=x^2$이다.

(c) 구하는 해는 $x^4+x^3y^2=c$이다.

3.

(a) $M(x,y)=y+xf(x^2+y^2)$,$N(x,y)=yf(x^2+y^2)-x$에서 $M_y=1+2xy+f'(x^2+y^2)$ 이고 $N_y=2xyf(x^2+y^2)-1$이므로 $M_y\neq N_x$이다.

(b) 증명 문제임

(c) $\tan^{-1}\frac{x}{y}+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{4}y^4=c$

**연습문제(2.4)**

1.

(1) $f(x,y)=3x^2+5xy-11y^2$에서 $f(tx,ty)=t^2f(x,y)$이다.

(2) $f(x,y)=2x^3+6y^3-xy^2$에서 $f(tx,ty)=t^3f(x,y)$이다.

(3) $f(x,y)=2x^n+7x^{n-m}y^m+5y^n$에서 $f(tx,ty)=t^nf(x,y)$이다.

(4) $f(x,y)=5x^2\sin\frac{y}{x}+3y^2\cos\frac{x}{y}$에서 $f(x,y)=t^2f(x,y)$이다.

2.

(1) $\ln(x^2+y^2)+3\tan^{-1}\frac{y}{x}=c$ (2) $\ln|x|^5+\ln|\frac{y}{x}+1|^7=c$

(3) $\ln x^2+\frac{1}{14}\ln|\frac{y}{x}|+\frac{27}{14}\ln|\frac{y}{x}+4|=c$ (4) $\ln x^{12}+11\ln|2(\frac{y}{x})^2-1|=c$

(5) $\dfrac{x^9}{y^3-x^3}=c$

3. $M(x,y)=f\left(\dfrac{ax+by}{cx+dy}\right), N(x,y)=-1$에서 $M(tx,ty)=M(x,y), N(tx,ty)=N(x,y)$이므로 0차형의 동차방정식이다.

연습문제(2.5)

1.

(1) $2xy+x^2=c$ (2) $y^2=c(x+2y)$ (3) $\ln|x|+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\dfrac{2y}{\sqrt{3}x}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=c$

(4) $(x+y)^2=c(y-x)$ (5) $x^2=c\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)$ (6) $\ln(x^2+y^2)+2\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=c$

2

(1) $\ln y^6-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x}{y}\right)^2=-\dfrac{2}{3}$ (2) $\ln y+\ln|\ln\dfrac{y}{x}|=1$ (3) $3\ln|x|+\left(\dfrac{y}{x}\right)^3=8$

(4) $\ln\}x\}-e^{\frac{y}{x}}=-1$

3.

(1) $x^2+3xy=5y$ (2) $y^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}=18$ (3) $\csc(x+y)-\cot(x+y)-x=\sqrt{2}-1$

(4) $\dfrac{y}{x}+\dfrac{4}{25}\ln|\dfrac{5y}{x}+6|=x+2+\dfrac{4}{25}\ln 11$

4.

(1) $\tan^{-1}(x+y+1)-x=c$ (2) $\dfrac{1}{2}(x+y)^2-x=c$

(3) $\dfrac{1}{2}(x+y)+\dfrac{1}{4}\sin 2(x+y)=x+c$ (4) $\tan(x+y)-\sec(x+y)-x=c$

(5) $2\sqrt{y-2x+3}-x=c$ (6) $e^{(x-y-5)}+x=c$

5. 구하는 해는 $y^8=c(y^2-x^2)^3$ 이다. $y=\pm 2x$는 주어진 방정식을 만족하지 않는다.

6. $\ln(5(y-1)^2+9x(y-1)+3x^2)-\dfrac{10}{\sqrt{595}}\tan^{-1}\dfrac{5}{2\sqrt{595}}\left(\dfrac{y+9x-1}{x}\right)=c$

연습문제(2.6)

1.

(1) $y = ce^{-2x}\ (-\infty < x < \infty)$ (2) $y = ce^{-4x} + \frac{1}{3}\ (-\infty < x < \infty)$

(3) $y = (x+c)e^{x}\ (-\infty < x < \infty)$ (4) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + ce^{x}\ (-\infty < x < \infty)$

(5) $y = ce^{-x^2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{11}{4}\ (-\infty < x < \infty)$

(6) $x = ce^{y} - (y+1)\ (-\infty < y < \infty)$

(7) $\ln|y| + 2\tan^{-1}x = c\ (-\infty < x < \infty)$ (8) $y = \frac{c}{x^3-1}\ (1 < x < \infty)$

(9) $y = \sin x + c\csc x\ (0 < x < \pi)$ (10) $y = \frac{ce^{x} - (2x+3)}{x+1} - x\ (-1 < x < \infty)$

(11) $xe^{x}y = c - \frac{1}{2}\cos 2x\ (0 < x < \infty)$ (12) $y = \frac{x^2+c}{x+1}e^{-x}\ (-1 < x < \infty)$

(13) $y = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)e^{x} + \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4} + \frac{c}{x^2}\ (0 < x < \infty)$

(14) $y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + c\right)e^{x}\ (-\infty < x < \infty)$

(15) $x = \left(1 - \frac{2}{y}\right)e^{y} + \frac{2+c}{y^2}\ (0 < y < \infty)$

(16) $r(\sec\theta + \tan\theta) = \theta - \cos\theta + c\ (-\pi/2 < \theta < \pi/2)$

(17) $y = \frac{(x+c)(x+1)}{x-1}\ (-1 < x < 1)$ (18) $x = e^{y} - ce^{-2y}\ (-\infty < y < \infty)$

(19) $y = x^4 - x^3\ln|x+1| + cx^3\ (-1 < x < \infty)$

(20) $y(1-\cos x)^2 = \ln|\sec x| + \cos x + c\ (0 < x < \pi/2)$

2.

(1) $y = (x-1)e^{3x} + (3 - \frac{1}{2}x^2)e^{2x}$ (2) $x = 2y^2 - \frac{49}{5}y$ (3) $Q = -7e^{x^5}$

(4) $y = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)e^{-x}$ (5) $y = \frac{e^{x} + 2 - e}{x}$

3.

(1) $y = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - e^{-2x}), & 0 \le x \le 3 \\ \frac{1}{2}(e^{6}-1)e^{-2x}, & x > 3 \end{cases}$ (2) $y = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 2e^{1-x} - 1, & x > 1 \end{cases}$

(3) $y = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{e+3}{2}e^{-x^2}, & x \ge 1 \end{cases}$ (4) $y = \begin{cases} \frac{x^2}{2(1+x^2)}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{2-x^2}{2(1+x^2)}, & x \ge 1 \end{cases}$

4.

(1) $y^3 = \frac{c}{x} + 3$ (2) $y = \frac{1}{ce^{-x} - \frac{1}{2}e^x}$ (3) $y^{-3} = ce^{3x} + x + \frac{1}{3}$

(4) $\frac{1}{y} = \frac{ce^{-x} - x + 1}{x}$ (5) $y = \frac{x}{c - \ln|x|}$ (6) $y^{-3} = c(x^2+1) + 1$

# 제 3장 연습문제

## 연습문제 (3.1)

1.

(1) $6x$ (2) $x^2 + 2x$ (3) $8e^{2x}$ (4) $e^{3x}$ (5) $-2a^2\cos ax$ (6) $-2a^2\sin ax$

(7) 0 (8) $65 \cdot (128\cos 8x - 320\sin 8x)$

2.

(1) $y = c_1 e^{2x} + c_2$ (2) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$ (3) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 x + c_3$

(4) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$ (5) $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x$

(6) $y = (c_1 + c_2 x)e^x + (c_3 + c_4 x + c_5 x^2)e^{2x}$

3.

(1) $L = D^3 + 10D^2 + 25D = D(D+5)^2$ (2) $L = D^3 - 3D - 2 = (D-2)(D+1)^2$

(3) $L = 9D^4 - 4 = (3D^2 - 2)(3D^2 + 2)$ (4) $L = D^2 - 5 = (D - \sqrt{5})(D + \sqrt{5})$

(5) $L = D^2 - 4D - 12 = (D-6)(D+2)$ (6) $L = 2D^2 - 3D - 2 = (D-2)(2D+1)$

## 연습문제(3.2)

1.

(1) 선형종속 (2) 선형종속 (3) 선형독립 (4) 선형종속 (5) 선형종속 (6) 선형종속

(7) 선형종속 (8) 선형종속

2. 선형종속

3. (1) $f(x) = 0$일 때 (2) $f(x) \neq 0$일 때

연습문제(3.3)

1-8. 주어진 함수들이 주어진 미분방정식의 해임을 보이고 선형독립임을 증명한다.

연습문제(3.4)

1.

(1) $y=c_1e^{-6x}+c_2e^{6x}$ (2) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}$ (3) $y=(c_1+c_2x)e^{5x}$

(4) $y=c_1e^{(-2+\sqrt{5})x}+c_2e^{-(2+\sqrt{5})x}$ (5) $y=c_1\cos\frac{1}{\sqrt{3}}x+c_2\sin\frac{1}{\sqrt{3}}x$

(6) $y=\left(c_1\cos\frac{x}{2}+c_2\sin\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$ (7) $y=(c_1+c_2x)e^{3x}$

(8) $y=c_1+c_2x+c_3e^{-x}$ (9) $y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^{x}$

(10) $y=c_1+c_2e^{3x}+\left(c_3e^{-\sqrt{2}x}+c_4e^{\sqrt{2}x}\right)e^{-x}$

2.

(1) $y=c_1e^{x}+\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}$

(2) $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}+c_3e^{-3x}$

(3) $y=c_1e^{2x}+\left(c_2\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x+c_3\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}$

(4) $y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{2x}$ (5) $y=(c_1+c_2x)e^{x}+(c_3+c_4x)e^{-x}$

(6) $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}+c_3\cos\sqrt{2}x+c_4\sin\sqrt{2}x$

(7) $y=c_1+c_2x+c_3e^{-\frac{x}{2}}+(c_4\cos 2x+c_5\sin 2x)e^{2x}$

(8) $y=c_1+c_2e^{5x}+c_3e^{-x}$ (9) $y=c_1+(c_2+c_3x)e^{x}$

(10) $y=c_1+c_2e^{-2x}+c_3e^{x}$ (11) $y=c_1(c_2\cos x+c_3\sin x)e^{2x}$

(12) $y=c_1+c_2x+\left(c_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}$

(13) $y=c_1+c_2x+c_3\cos x+c_4\sin x$

(14) $y=c_1+c_2x+(c_3+c_4x)\cos\sqrt{3}x+(c_5+c_6x)\sin\sqrt{3}x$

3.

(1) $y=2\cos 4x-\frac{1}{2}\sin 4x$ (2) $y=\frac{1}{3}e^{5(x-1)}-\frac{1}{3}e^{1-x}$

(3) $y=\frac{5}{36}(1-e^{6x})+\frac{1}{6}xe^{-6x}$

(4) $y=0$ (5) $y=e^{-x}\sin x$ (6) $y=-\frac{1}{6}e^{-x}+\frac{1}{15}e^{2x}+\frac{1}{10}e^{-3x}$

4.

(1) $y=e^{5x}(1-x)$ (2) $y=c\sin 2x$ (3) $y=-2\cos x$

(4) $y=(\cos x-2\sin x)e^{x}$

(5) $y=\cos\sqrt{3}x+\frac{5}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}x$

연습문제(3.5)

1. 증명문제

2.

(1) 증명문제임 (2) $y_{p}=-\frac{1}{3}e^{2x}-2(x^{2}+3x)$

3.

(1) $y=\frac{1}{5}(3\cos 2x+4\sin 2x)e^{-x}-\frac{1}{3}x^{3}+x^{2}-\frac{8}{5}$

(2) $y=3x-x\ln x+x(\ln x)^{2}+\ln x$

4.

(1) $y=c_{1}+c_{2}e^{-x}+2x^{2}-4x$ (2) $y=c_{1}+(c_{2}-x)e^{-x}$

(3) $y=(c_{1}+c_{2}x)e^{x}+\frac{1}{2}x^{2}e^{x}-3x+\frac{1}{3}$

(4) $y=c_{1}\cos 2x+c_{2}\sin 2x+\left(\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}x\right)\sin 2x$

(5) $y=c_{1}\cos 2x+c_{2}\sin 2x+c_{3}+x-x\cos 2x$

(6) $y=c_{1}\cos 2x+c_{2}\sin 2x+\left(\frac{1}{16}\sin 4x-\frac{1}{4}x^{2}\right)\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 4x\sin 2x$

(7) $y=(c_{1}\cos x+c_{2}\sin x)e^{x}+\left(\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}x\right)\cos xe^{x}-\frac{1}{4}e^{x}\cos 2x\sin x$

(8) $y=c_{1}+(c_{2}\cos 2x+c_{3}\sin 2x)+\frac{30}{17}\cos 2x+\frac{15}{34}\sin 2x+2$

5.

(1) $y=3e^{-3x}+2x$ (2) $y=(x-\frac{3}{4})e^{x}+e^{-x}-e^{-3x}-2$

연습문제(3.6)

1.

(1) $y=c_1e^{\frac{1}{2}x}+c_2e^{5x-\frac{29}{5}}$ (2) $y=(c_1+c_2x)e^{-x}+c_3+10x$

(3) $y=c_1e^{-3x}+c_2+\frac{2}{3}x^2-3x$ (4) $y=(c_1+c_2x)e^x+x^3+6x^2+22x+32$

(5) $y=(c_1\cos x+c_2\sin x)e^x+\frac{5}{53}e^{6x}$

(6) $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-4x}+\frac{3}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{4}x-\frac{3}{16}$

(7) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{4}{3}\cos x+\sin x-2$

(8) $y=c_1e^{-5x}+c_2e^{2x}-\left(\frac{1}{6}x+\frac{5}{36}\right)e^x-\frac{1}{10}x-\frac{3}{100}$

(9) $y=(c_1+c_2x)e^{-x}+\frac{1}{12}x^4e^{-x}$ (10) $y=c_1\cos 5x+c_2\sin 5x+\frac{5}{4}\sin x$

(11) $y=(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)e^{-\frac{x}{2}}+\sin x-x\cos x$

(12) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{8}x\sin 2x+\frac{1}{8}$

(13) $(c_1+c_2x+c_3x^2)e^x+\frac{1}{6}x^3e^x+x-13$

(14) $y=(c_1+c_2x)e^x+c_3x+c_4+\frac{1}{2}x^2(e^x+1)$

2.

(1) $y=\frac{5}{8}(e^{-8x}+e^{8x})-\frac{1}{4}$ (2) $y=-e^{-x}+\frac{1}{2}x^2-x+2$

(3) $y=\frac{41}{125}(e^{5x}-1)-\frac{1}{10}x^2+\frac{9}{25}x$ (4) $y=\frac{5}{28}e^{-6x}-\frac{3}{7}e^x+\frac{5}{4}e^{2x}$

(5) $y=2\sin x+\frac{20}{3}\cos x-\frac{8}{3}\cos 2x+2x\cos x$

(6) $y=(2x-5)e^x+\frac{1}{12}x^3e^x+5x+7$

(7) $y=(4\cos 2x-\frac{3}{64}\sin 2x)e^{2x}+\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{16}x^2+\frac{3}{32}x$

(8) $y=(x-2)e^x-\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{6}x^3+x+2$

연습문제(3.7)

1,

(1) $y_2 = e^{-x}$ (2) $y_2 = \cos 3x$ (3) $y_2 = e^{-5x}$ (4) $y_2 = e^{-x/2}$

(5) $y_2 = x^3$ (6) $y_2 = x^{1/2}$ (7) $y_2 = x\cos(\ln x)$

(8) $y_2 = \ln|(1+x)/(1-x)|$ (9) $y_2 = xe^{2x}$

(10) $y_2 = \sin 4x$ (11) $y_2 = x^4 \ln|x|$ (12) $y_2 = \sinh x$

2.

(1) $y_2 = e^{2x},\ y_p = -\frac{1}{2}$ (2) $y_2 = e^{-x},\ y_p = x$ (3) $y_2 = e^{2x},\ y_p = \frac{5}{2}e^{3x}$

(4) $y_2 = e^{3x},\ y_p = \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}$

연습문제(3.8)

1.

(1) $y = c_1\cos x + c_2\sin x - \cos x \cdot \ln|\sec x + \tan x|,\ \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

(2) $y = c_1\cos x + c_2\sin x + x\cos x - \sin x \cdot \ln|\cos x|,\ \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

(3) $y = c_1\cos x + c_2\sin x + \sin x \cdot \ln|\sec x + \tan x| - 1,\ \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

(4) $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + \frac{1}{3}\sinh 2x,\ (-\infty < x < \infty)$

(5) $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x} - \frac{1}{4}x(1-3x)e^{-3x},\ (-\infty < x < \infty)$

(6) $y = c_1e^{x} + c_2xe^{x} - \frac{1}{2}e^{x}\ln(1+x^2) + xe^{x}\tan^{-1}x,\ (-\infty < x < \infty)$

(7) $y = c_1e^{x} + c_2xe^{x} + \frac{1}{2}e^{x}[(x^2-1)\tan^{-1}x - \ln(1+x^2)],\ (-\infty < x < \infty)$

(8) $y = c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x + 2x^2$

(9) $y = (c_1\cos x + c_2\sin x)e^{x} + \frac{1}{3}\cos x \cdot e^{x} \cdot \ln|\cos x| + \frac{1}{3}x\sin x \cdot e^{x}$

(10) $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{-3x} - 3e^{-3x}\ln|x| + \frac{15}{2}e^{-3x}$

2.

(1) $y=\frac{3}{4}e^{x/2}+\frac{1}{4}e^{-x/2}+\frac{1}{8}x^2e^{x/2}-\frac{1}{4}xe^{x/2}$

(2) $y=\frac{8}{3}e^{x/2}+\frac{1}{3}e^{-x}-(x+2)$

(3) $y=\frac{25}{36}e^{2x}+\frac{4}{9}e^{-4x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+\frac{1}{9}e^{-x}$

(4) $y=e^{2x}(x^4-x^3-2x+1)$

3.

(1) $y=c_1x^{-1/2}\cos x+c_2x^{-1/2}\sin x+x^{-1/2}$

(2) $y=c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\cdot\ln|\cos(\ln x)|+(\ln x)\cdot\sin(\ln x)$

4.

(1) $y=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3-\ln|\cos x|-\sin x\cdot\ln|\sec x+\tan x|$

(2) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+c_3+\frac{1}{8}\ln|\sec 2x+\tan 2x|-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 3x\cdot\ln|\cos 2x|$

(3) $y=c_1e^x+c_2xe^x+4x^2+16x+24$

연습문제(3.9)

1.

(1) $x=e^t$으로 치환하면, 주어진 식은 $\frac{d^2y}{dt^2}+8\frac{dy}{dt}-20y=0$이 된다.

그리고 구하는 해는 $y=c_1x^2+c_2x^{-10}$이다.

(2) $x=e^t$으로 치환하면, 주어진 식은 $\frac{d^2y}{dt^2}\pm10\frac{dy}{dt}+25y=0$이 된다.

그리고 구하는 해는 $y=(c_1+c_2\ln x)x^5$이다.

(3) $x=e^t$으로 치환하면, 주어진 식은 $\frac{d^2y}{dt^2}+9\frac{dy}{dt}+8y=e^{2t}$이 된다.

그리고 구하는 해는 $y=c_1\frac{1}{x}+c_2\frac{1}{x^8}+\frac{1}{30}x^2$이다.

(4) $x=e^t$으로 치환하면, 주어진 식은 $\frac{d^2y}{dt^2}-5\frac{dy}{dt}+6y=2t$가 된다.

그리고 구하는 해는 $y=c_1x^2+c_2x^3+\frac{1}{3}\ln x+\frac{5}{18}$이다.

(5) $x=e^t$으로 치환하면, 주어진 식은 $\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+3y=3e^t+4$가 된다.

그리고 구하는 해는 $y=[c_1\cos 3(\ln x)+c_2\sin(\ln x)]x^2+\frac{3}{10}x+\frac{4}{13}$ 이다.

(6) $x=e^t$으로 치환하면, 주어진 식은 $\frac{d^3y}{dt^3}-6\frac{d^2y}{dt^2}+11\frac{dy}{dt}-6y=3t+3$이 된다.

그리고 구하는 해는 $y=c_1x+c_2x^2+c_3x^3-\frac{1}{2}\ln x-\frac{17}{12}$ 이다.

2.

(1) $y=(c_1+c_2\ln x)x^{1/2}$ (2) $y=c_1x^4+c_2$ (3) $y=c_1\frac{1}{x}+c_2\frac{1}{x^3}$

(4) $y=(c_1x^{\sqrt{5}}+c_2x^{-\sqrt{5}})\frac{1}{x}$ (5) $y=c_1x^{1/2}+c_2x^{-1/2}$ (6) $y=c_1\frac{1}{x}+c_2\frac{1}{x^6}$

(7) $y=[c_1cos5(\ln x)+c_2\sin 5(\ln x)]x^4$ (8) $y=[c_1\ln x+c_2(\ln x)^2+c_3]x$

(9) $y=c_1x+c_2x^2+c_3x^{-3}+c_4$ (10) $y=c_1x^3+c_2\cos\sqrt{2}(\ln x)+c_3\sin\sqrt{2}(\ln x)$

3.

(1) $y=(c_1+\frac{1}{5}\ln x)x^5+c_2$ (2) $y=c_1x^{-1/2}+c_2x^{-1}+\frac{1}{15}x^2-\frac{1}{6}x$

(3) $y=(c_1+c_2\ln x)x+x(\ln x)^2$ (4) $y=c_1x+c_2x^2+(x^2-2x)e^x$

4.

(1)$y=2(1-\frac{1}{x^2})$ (2) $y=16x^2-2x^4$ (3) $y=\cos(\ln x)+2\sin(\ln x)$

(4)$y=(5-7\ln x)x^2$ (5) $y=\frac{1}{4}x^2-\ln x+\frac{3}{4}$ (6) $y=c_1x^2+c_4x^4+x^6$

(7) $y=[2-5\ln(-x)]\sqrt{-x}$ (8) $y=6x^2+2x^3$

**연습문제(3.10)**

1.

(1) $y=-\ln|\cos(x+c_1)|+c_2$ (2) $\ln|y+1|=c_1x+c_2$

(3) $c_1x+c_2=\int e^{y^2}dy$ (4) $x=-c_1\ln|c_2-y|-y$

2.

(1) $\frac{dw}{dx}+\frac{2}{x}w=-\frac{2}{x}$, $y=-\sqrt{c_1-x^2}+c_2$

(2) $\frac{du}{dx}-\frac{1}{x}u=u^2$, $y=\ln|x^2+c_1|+c_2$

3. 증명문제

4.

(1) $y=1|x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{10}x^5$

(2) $y=2+3x-\frac{1}{2}x^2-2x^3-\frac{7}{12}x^4+\frac{11}{20}x^5$

(3) $y=1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}x^3-\frac{5}{12}x^4+\frac{1}{5}x^5$

(4) $y=-x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5$

# 제 4장 연습문제

**연습문제(4.1)**

1.

(1) 수렴반경$=\frac{1}{2}$; 수렴구간: $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}$

(2) 수렴반경$=\infty$; 수렴구간: $-\infty < x < \infty$

(3) 수렴반경$=10$; 수렴구간: $-5 \leqq x \leqq 15$

(4) 수렴반경$=0$; 수렴구간: $x=1$

2.

(1) $\sin x \cos x = x-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{8}{315}x^7$ (2) $1-x+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{24}x^4$

(3) $1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+\frac{17}{240}x^6$ (4) $1-2x+2x^2-2x^3$

3. 증명문제

4.

(1) $y_1=c_0\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3\cdot 4\cdots\cdot(4k-1)\cdot(4k)}x^{4k}\right)$,

$y_2=c_1\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4\cdot 5\cdots\cdot(4k)\cdot(4k+1)}x^{4k+1}\right)$

(2) $y_1=c_0(1-\frac{1}{2}x^2)$, $y_2=c_1\left(x-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right)$

(3) $y_1=c_0\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-2)^k}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2k)}x^{2k}\right)$,

$$y_2 = c_1\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k+1)} x^{2k+1}\right)$$

(4) $y_1 = c_0\left(1 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4!}x^3 + \frac{1}{4 \cdot 5!}x^5 - \frac{1}{2 \cdot 6!}x^6 + \cdots\right)$, $y_2 = c_1 x$

(5) $y_1 = c_0\left(1 + 3x^2 + x^4 - \frac{1}{5}x^6 + \frac{3}{35}x^8 - \frac{1}{21}x^{10} + \cdots\right)$, $y_2 = c_1(x + x^3)$

(6) $y_1 = c_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2 \cdot 4}x^4 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^8 - \cdots\right)$, $y_2 = c_1 x$

5.

(1) $y = 2\left(1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\right) + 6x$

(2) $y = 1 - x - 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 - \cdots$

(3) $y = 4x^4 - 12x^2 + 3$

(4) $y = 1 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9} - \cdots$

6.

(1) $y_1 = c_0\left(1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots\right)$, $y_2 = c_1\left(x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{180}x^6 - \cdots\right)$

(2) $y_1 = c_0\left(1 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 - \cdots\right)$, $y_2 = c_1\left(x - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{180}x^6 - \cdots\right)$

## 연습문제(4.2)

1.

(1) $x=0$이 불확정특이점이다.
(2) $x=0$과 $x=-3$이 모두 확정특이점이다.
(3) $x=\pm 3$이 불확정특이점이다.
(4) $x=0$이 확정 특이점이고 $x=1$은 불확정특이점이다.
(5) $x=0$이 불확정특이점이다.
(6) $x=0$이 확정특이점이고 $x=5$는 불확정특이점이다.
(7) $x=2$와 $x=-3$이 모두 확정특이점이다.
(8) $x=0$이 확정특이점이다.

2.

(1) $r_1 = \frac{3}{2}$, $r_2 = 0$이고

$$y = c_1 x^{\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{2}{5}x + \frac{2^2}{7 \cdot 5 \cdot 2!}x^2 - \frac{2^3}{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3!}x^3 + \cdots\right) + c_2\left(1 + 2x - 2x^2 + \frac{2^3}{3 \cdot 3!}x^3 - \right)$$

이다.

(3) $r_1 = \frac{7}{8}$, $r_2 = 0$이고

$$y = c_1 x^{\frac{7}{8}}\left(1 - \frac{2}{15}x + \frac{2^2}{23 \cdot 15 \cdot 2}x^2 - \frac{1}{31 \cdot 23 \cdot 15 \cdot 3!}x^3 + \right) + c_2\left(1 - 2x + \frac{2^2}{9 \cdot 2}x^2 - \frac{2^3}{17 \cdot 9 \cdot 3!}x^3 + \right)$$

이다.

(5) $r_1 = \frac{1}{3}$, $r_2 = 0$이고

$$y = c_1 x^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3^2 \cdot x}x^2 + \frac{1}{3^3 \cdot 3!}x^3 + \cdots\right) + c_2\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{5 \cdot 2}x^2 + \frac{1}{8 \cdot 5 \cdot 2}x^3 + \cdots\right)$$

이다.

(7) $r_1 = \frac{5}{2}$, $r_2 = 0$이고

$$y = c_1 x^{\frac{5}{2}}\left(1 + \frac{2 \cdot 2}{7}x + \frac{2^2 \cdot 3}{9 \cdot 7}x^2 + \frac{2^3 \cdot 4}{11 \cdot 9 \cdot 7}x^3 + \cdots\right) + c_2\left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \cdots\right)$$

(9) $r_1 = \frac{2}{3}$, $r_2 = \frac{1}{3}$이고

$$y = c_1 x^{\frac{2}{3}}\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{28}x^2 - \frac{1}{21}x^3 + \cdots\right) + c_2 x^{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}x^2 - \frac{7}{120}x^3 + \cdots\right)$$

이다.

# 제 5 장

# 라플라스 변환

## 제 1 절 라플라스 변환과 역변환

1. (1) $L[t^5] = \dfrac{5!}{s^6}$

(2) $L[(2t-1)^3] = L[8t^3 - 12t^2 + 6t - 1] = 8\ L[t^3] - 12\ L[t^2] + 6L[t] - L[1]$
$= \dfrac{48}{s^4} - \dfrac{24}{s^3} + \dfrac{6}{s^2} - \dfrac{1}{s} = \dfrac{48 - 24s - 6s^2 - s^3}{s^4}$

(3) $L[1 + e^{4t}] = L[1] + L[e^{4t}] = \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s-4} = \dfrac{2s-4}{s(s-4)}$

(4) $L[3e^{2t} + 2\sin^2 3t] = 3L[e^{2t}] + 2L[\sin^2 3t] = \dfrac{3}{s-2} + \dfrac{36}{s(s^2+36)} = \dfrac{3s^3 + 144s - 72}{s(s-2)(s^2+36)}$

(5) $L[4\sin 3t - 5\cos 3t] = 4L[\sin 3t] - 5L[\cos 3t] = \dfrac{12}{s^2-9} - \dfrac{5s}{s^2+9} = \dfrac{12-5s}{s^2+9}$

(6) $L[e^t \sin t] = L[e^t \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}] = L[\dfrac{1}{2}e^{2t} - \dfrac{1}{2}] = \dfrac{1}{2}L[e^{2t}] - \dfrac{1}{2}L[1] = \dfrac{1}{2(s-2)} - \dfrac{1}{2s} = \dfrac{1}{s(s-2)}$

(7) $L[\sin 2t \cos 2t] = L[\dfrac{1}{2}\sin 4t] = \dfrac{1}{2}L[\sin 4t] = \dfrac{2}{s^2+16}$

(8) $L[\cos^2 t] = L[\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2t] = \dfrac{1}{2}L[1] + \dfrac{1}{2}L[\cos 2t] = \dfrac{1}{2s} + \dfrac{s}{2(s^2+4)} = \dfrac{s^2+2}{s(s^2+4)}$

2. $L[\sin^2 t] = [\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2t] = \dfrac{1}{2}L[1] - \dfrac{1}{2}L[\cos 2t] = \dfrac{1}{2s} - \dfrac{s}{2(s^2+4)} = \dfrac{s^2+4-s^2}{2s(s^2+4)} = \dfrac{2}{s(s^2+4)}$

3. (1) $L[f(t)] = \displaystyle\int_0^2 4e^{-st}dt = \Big[-\dfrac{4}{s}e^{-st}\Big]_0^2 = -\dfrac{4}{s}(e^{-2s} - 1) \qquad (s > 0)$

(2) $L[f(t)] = \displaystyle\int_0^1 te^{-st}dt + \int_1^\infty 2e^{-st}dt = \Big[-\dfrac{1}{s}te^{-st} - \dfrac{1}{s^2}e^{-st}\Big]_0^1 - \Big[\dfrac{2}{s}e^{-st}\Big]_1^\infty$

$= \frac{1}{s^2}(1-e^{-s}) \qquad (s>0)$

4. (1) 수학적 귀납법을 이용하여 $L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$ 임을 증명할 수 있다. $n=1$ 일 때 예제4의 (1)에 의하여 $L[t] = \frac{1}{s^2} \qquad (s>0)$ 이다.
$n$일 때 $L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$ 이 성립한다고 가정하자. $n+1$일 때에는
$L[t^{n+1}] = \Big[-\frac{t^{n+1}e^{-st}}{s}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{(n+1)t^n e^{-st}}{s}dt = \frac{n+1}{s}L[t^n] = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}} \qquad (s>0)$이므로 모든 $n$에 대하여 $L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad (s>0)$ 이 성립한다.
(2) $\cosh at = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}$이므로 $L[\cosh at] = L[\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}] = \frac{1}{2}L[e^{at}] + \frac{1}{2}L[e^{-at}]$
$= \frac{1}{2(s-a)} + \frac{1}{2(s+a)} = \frac{s}{s^2-a^2} \qquad (s>a>0)$

(3) $\sinh at = \frac{e^{at}-e^{-at}}{2}$이므로 $L[\sinh at] = L[\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}]$
$= \frac{1}{2(s-a)} - \frac{1}{2(s+a)} = \frac{a}{s^2-a^2} \qquad (s>a>0)$

5. $u = st, du = sdt$이라 하자.
$L[t^\alpha] = \int_0^\infty e^{-st}t^\alpha dt = \int_0^\infty e^{-u}\Big(\frac{u}{s}\Big)^\alpha \frac{1}{s}du = \frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^\alpha du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1)}} \qquad (\alpha > -1)$
$x>0$일 때 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$와 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$임을 이용하여 주어진 문제를 풀 수 있다.
(1) $L[t^{-\frac{1}{2}}] = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$
(2) $L[t^{\frac{1}{2}}] = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{s^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$
(3) $L[t^{\frac{3}{2}}] = \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{s^{\frac{5}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}{s^{\frac{5}{2}}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4s^{\frac{5}{2}}}$
(4) $L[3t^2+4t^{\frac{5}{2}}] = 3L[t^2] + 4L[t^{\frac{5}{2}}] = \frac{6}{s^3} + \frac{4\Gamma(\frac{7}{2})}{s^{\frac{7}{2}}} = \frac{6}{s^3} + \frac{4\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{7}{2}}} = \frac{6}{s^3} + \frac{15\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{7}{2}}}$

6. $L[\frac{1}{t^2}] = \int_0^1 \frac{1}{t^2}e^{-st}dt + \int_1^\infty \frac{1}{t^2}e^{-st}dt$이다.
$s=0$이면$\int_0^1 \frac{1}{t^2}e^{-st}dt = \int_0^1 \frac{1}{t^2}dt$ 이므로 이상적분 $\int_0^1 \frac{1}{t^2}e^{-st}dt$는 발산한다.

$s<0$이면 $\int_0^1 \frac{1}{t^2}e^{-st}dt > \int_0^1 \frac{1}{t^2}dt$이므로 이상적분 $\int_0^1 \frac{1}{t^2}e^{-st}dt$는 발산한다.
$s>0$이면 $\int_0^1 \frac{1}{t^2}e^{-st}dt > e^{-s}\int_0^1 \frac{1}{t^2}e^{-st}dt$이므로 이상적분 $\int_0^1 \frac{1}{t^2}e^{-st}dt$는 발산한다.
따라서 함수 $f(t)=\frac{1}{t^2}$은 라플라스 변환을 가지지 않는다.

7. (1) $L^{-1}[\frac{1}{s^4}] = \frac{1}{3!}L^{-1}[\frac{3!}{s^4}] = \frac{1}{6}t^3$
(2) $L^{-1}[(\frac{2}{s}-\frac{1}{s^3})^2] = L^{-1}[4\ \frac{1}{s^2} - \frac{4}{6}\ \frac{3!}{s^4} + \frac{1}{120}\ \frac{5!}{s^6}] = 4t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{120}t^5$
(3) $L^{-1}[\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}] = L^{-1}[-\frac{1}{16}\frac{1}{s} + \frac{1}{8}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{16}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{4}\frac{1}{(s+2)^3}]$
$= -\frac{1}{16}L^{-1}[\frac{1}{s}] + \frac{1}{8}L^{-1}[\frac{1}{s^2}] + \frac{1}{16}L^{-1}[\frac{1}{s+2}] - \frac{1}{8}L^{-1}[\frac{2!}{(s+2)^3}] = -\frac{1}{16} + \frac{1}{8}t + \frac{1}{16}e^{-2t} - \frac{1}{8}t^2e^{-2t}$
(4) $L^{-1}[\frac{1}{s^3(s^2+4)}] = L^{-1}[\frac{1}{8}\frac{1}{s} + \frac{3}{4}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^3} - \frac{1}{8}\frac{s}{s^2+4} - \frac{3}{4}\frac{1}{s^2+4}]$
$= \frac{1}{8} + \frac{3}{4}t - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}\cos 2t - \frac{3}{8}\sin 2t$
(5) $L^{-1}[\frac{s}{s^2+2s-3}] = L^{-1}[\frac{1}{4}\frac{1}{s-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{s+3}] = \frac{1}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{-3t}$
(6) $L^{-1}[\frac{1}{s^2+s-20}] = L^{-1}[\frac{1}{9}\frac{1}{s-4} - \frac{1}{9}\frac{1}{s+5}] = \frac{1}{9}e^{4t} - \frac{1}{9}e^{-5t}$
(7) $L^{-1}[\frac{2s-6}{s^2+9}] = L^{-1}[2(\frac{s}{s^2+3^2} - \frac{3}{s^2+3^2})] = 2(\cos 3t - \sin 3t)$
(8) $L^{-1}[\frac{s+1}{s^2-4s}] = L^{-1}[-\frac{1}{4}\frac{1}{s} + \frac{5}{4}\frac{1}{s-4}] = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}e^{4t}$
(9) $L^{-1}[\frac{s}{s^2+6s+11}] = L^{-1}[\frac{s+3}{(s+3)^2+(\sqrt{2})^2} - \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{(s+3)^2+(\sqrt{2})^2}] = e^{-3t}\cos\sqrt{2}t - \frac{3}{\sqrt{2}}e^{-3t}$
(10) $L^{-1}[\frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{s^2+2s-8}] = L^{-1}[\frac{1}{2}\frac{2!}{(s-1)^3} + \frac{1}{3}\frac{3}{(s+1)^2-3^2}] = \frac{1}{2}t^2e^t + \frac{1}{3}e^{-t}\sinh 3t$

8. (1) $L[te^{10t}] = \frac{1}{(s-10)^2}$
(2) $L^{-1}[t^3e^{-2t}] = \frac{6}{(s+2)^4}$
(3) $L[e^t\sin 3t] = \frac{3}{(s-1)^2+9}$
(4) $L[e^{-t}\cosh t] = \frac{s+1}{(s+1)^2-1}$
(5) $L[e^{-t}\sin^2 t] = L[e^{-t}\frac{1-\cos 2t}{2}] = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s+1} - \frac{s+1}{(s+1)^2+4}\Big)$
(6) $L[e^t\cos^2 3t] = L[\frac{1}{2}(e^t + e^t\cos 6t)] = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s-1} + \frac{s-1}{(s-1)^2+36}\Big)$

(7) $L^{-1}[\frac{1}{(s-1)^4}] = L^{-1}[\frac{1}{3!}\frac{3!}{(s-1)^4}] = \frac{1}{6}e^t t^3$

(8) $L^{-1}[\frac{1}{(s+2)^3}] = L^{-1}[\frac{1}{2!}\frac{2!}{(s+2)^3}] = \frac{1}{2}e^{-2t}t^2$

(9) $L^{-1}[\frac{1}{s^2-6s+10}] = L^{-1}[\frac{1}{(s-3)^2+1}] = e^{3t}\sin t$

(10) $L^{-1}[\frac{s}{s^2+4s+5}] = L^{-1}[\frac{s+2}{(s+2)^2+1} - 2\frac{1}{(s+2)^2+1}] = e^{-2t}\cos t - 2e^{-2t}\sin t$

## 제 2 절 여러가지 성질

1. 이상적분 $\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}f'(t)dt$가 존재함을 보이면 된다. 먼저 $b$를 고정시키고 $f'$이 불연속이 되는 점 $t_1, t_2, \cdots, t_{k-1}$을 $[0,b]$의 점이라 하자. 또, $t_0=0$이고 $t_k=b$이라 하자. $f'$은 각 구간 $(t_{n-1}, t_n)$에서 연속이므로 적분 $\int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-st}f'(t)dt$는 존재한다. 따라서 $\int_0^b e^{-st}f'(t)dt = \sum_{n=1}^{k}\int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-st}f'(t)dt$

$$= \sum_{n=1}^{k}\Big(\Big[e^{-st}f(t)\Big]_{t_{n-1}}^{t_n} + s\int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-st}f(t)dt\Big) = -f(0) - \sum_{n=1}^{k-1} e^{-st_n}j_f(t_n) + e^{-sb}f(b) + s\int_0^b e^{-st}f(t$$

여기서 $j_f(t_n) = f(t_n^+) - f(t_n^-)$ 이다.

그런데 $f$는 연속이므로 모든 $n=1,2,\cdots,k-1$에 대하여 $j_f(t_n)=0$이고, $b>a$이면 $\lim_{b\to\infty} e^{-sb}f(b) = 0$이다. 따라서 $L[f'(t)] = sL[f(t)] - f(0) = sF(s) - f(0)$가 성립한다.

2. $F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$에서 $F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds}(e^{-st}f(t))dt = \int_0^\infty e^{-st}(-tf(t))$ 이므로 $F'(s) = L[-tf(t)]$이다. 또 $f(t) = L^{-1}[f(t)] = -\frac{1}{t}L^{-1}[F'(s)]$가 성립한다.

3. $f(t) = \cos^2 t$이라 하자. $f'(t) = \frac{d}{dt}\cos^2 t = -\sin 2t, f(0)=1$이므로 $L[-\sin 2t] = sL[\cos^2 t] - 1$이다. 따라서 $L[\cos^2 t] = \frac{1}{s}(1 - L[\sin 2t]) = \frac{1}{s}\Big(1 - \frac{2}{s^2+4}\Big) = \frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$이다.

4. (1) $L[\int_0^t e^\tau d\tau] = \frac{1}{s}L[e^t] = \frac{1}{s(s-1)}$

(2) $L[\int_0^t \cos\tau d\tau] = \frac{1}{s}L[\cos t] = \frac{s}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s^2+1}$

(3) $L[\int_0^t e^{-\tau}\cos\tau d\tau] = \frac{1}{s}L[e^{-t}\cos t] = \frac{1}{s}\frac{s+1}{(s+1)^2+1} = \frac{s+1}{s(s^2+2s+2)}$

(4) $L[\int_0^t \tau\sin\tau d\tau] = \frac{1}{s}L[t\sin t] = \frac{1}{s}\Big(-\frac{d}{ds}(\frac{1}{s^2+1})\Big) = -\frac{1}{s}\frac{-2s}{(s^2+1)^2} = \frac{2}{(s^2+1)^2}$

(5) $L[t^2 * t^4] = L[t^2]L[t^4] = \frac{2!}{s^3}\frac{4!}{s^5} = \frac{48}{s^8}$

(6) $L[t^2 * te^t] = L[t^2]L[te^t] = \frac{2}{s^3}\Big(-\frac{d}{ds}(\frac{1}{s-1})\Big) = \frac{1}{s^3(s-1)^2}$

(7) $L[e^{-t} * e^{t}\cos t] = L[e^{-t}]L[e^{t}\cos t] = \dfrac{s-1}{(s+1)[(s-1)^2+1]}$

(8) $L[e^{2t} * \sin t] = L[e^{2t}]L[\sin t] = \dfrac{1}{(s-2)(s^2+1)}$

5. (1) $L^{-1}[\dfrac{1}{s(s+1)}] = 1 * e^{-t} = \displaystyle\int_0^t e^{-(t-\tau)}d\tau = \Big[e^{-(t-\tau)}\Big]_0^t = 1 - e^{-t}$

(2) $L^{-1}[\dfrac{1}{s(s^2+1)}] = 1 * \sin t = \displaystyle\int_0^t \sin(t-\tau)d\tau = \Big[\cos(t-\tau)\Big]_0^t = 1 - \cos t$

(3) $L^{-1}[\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}] = e^{-t} * e^{-2t} = \displaystyle\int_0^t e^{-\tau}e^{-2(t-\tau)}d\tau = \int_0^t e^{-2t+\tau}d\tau = \Big[e^{-2t+\tau}\Big]_0^t = e^{-t} - e^{-}$

(4) $L^{-1}[\dfrac{1}{(s+1)^2}] = e^{-t} * e^{-t} = \displaystyle\int_0^t e^{-\tau}e^{-(t-\tau)}d\tau = e^{-t}\int_0^t 1d\tau = te^{-t}$

(5) $L^{-1}[\dfrac{1}{(s^2+4)^2}] = \cos 2t * \dfrac{1}{2}\sin 2t = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \cos 2\tau \sin 2(t-\tau)d\tau$

$= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \cos 2\tau(\sin 2t\cos 2\tau - \cos 2t\sin 2\tau)d\tau = \dfrac{1}{2}\Big[\sin 2t\int_0^t \cos^2 2\tau d\tau - \cos 2t\int_0^t \dfrac{1}{2}\sin 4\tau d\tau\Big]$

$= \dfrac{1}{2}\sin 2t\Big[\dfrac{1}{2}\tau + \dfrac{1}{8}\sin 4\tau\Big]_0^t - \dfrac{1}{4}\cos 2t\Big[-\dfrac{1}{4}\cos 4\tau\Big]_0^t = \dfrac{1}{4}t\sin 2t + \dfrac{1}{16}\sin 2t\sin 4t + \dfrac{1}{16}\cos 2t(\cos 4$

$= \dfrac{1}{4}t\sin 2t + \dfrac{1}{16}\Big[\sin 2t(2\sin 2t\cos 2t) + \cos 2t(\cos^2 2t - \sin^2 2t) - \cos 2t\Big] = \dfrac{1}{4}t\sin 2t$

(6) $L^{-1}[\dfrac{1}{(s^2+4s+5)^2}] = L^{-1}[\dfrac{1}{[(s+2)^2+1]^2}] = e^{-2t}\sin t * e^{-2t}\sin t$

$= \displaystyle\int_0^t e^{-2\tau} \quad \sin\tau e^{-2(t-\tau)}\sin(t-\tau)d\tau = e^{-2t}\int_0^t \sin\tau(\sin t\cos\tau - \cos t\sin\tau)d\tau$

$= e^{-2t}\Big[\sin t\displaystyle\int_0^t \dfrac{1}{2}\sin 2\tau d\tau - \cos t\int_0^t \dfrac{1}{2}(1-\cos 2\tau)d\tau\Big]$

$= e^{-2t}\Big(\Big[-\dfrac{1}{4}\sin t\cos 2\tau\Big]_0^t - \Big[\dfrac{1}{2}\cos t(\tau - \dfrac{1}{2}\sin 2\tau)\Big]_0^t\Big)$

$= e^{-2t}\Big[-\dfrac{1}{4}\sin t(\cos 2t - 1) - \dfrac{1}{2}\cos t(t - \dfrac{1}{2}\sin 2t)\Big] = \dfrac{1}{2}e^{-2t}(\sin t - t\cos t)$

6. (1) $t * 1 = \displaystyle\int_0^t \tau d\tau = \dfrac{t^2}{2}$

(2) $t^2 * \cos t = \displaystyle\int_0^t \tau^2\cos(t-\tau)d\tau = 2(t - \sin t)$

(3) $\sin t * \sin t = \displaystyle\int_0^t \sin\tau\sin(t-\tau)d\tau = \dfrac{1}{2}\int_0^t [\cos(2\tau - t) - \cos t]d\tau$

$= \dfrac{1}{2}\Big[\dfrac{1}{2}\sin(2\tau - t) - \tau\cos t\Big]_0^t = \dfrac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$

(4) $e^{at} * e^{bt} = \displaystyle\int_0^t e^{at}e^{b(t-\tau)}d\tau = e^{bt}\int_0^t e^{(a-b)\tau}d\tau = \dfrac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$

7. (1) $L[t^2 \cos 2t] = \dfrac{d^2}{ds^2}\Big(\dfrac{s}{s^2+4}\Big) = \dfrac{d}{ds}\Big(\dfrac{4-s^2}{(s^2+4)^2}\Big) = \dfrac{2s(s^2-12)}{(s^2+4)^3}$

(2) $L[e^t \sin 3t] = \dfrac{3}{(s-1)^2+9}$

(3) $L[\dfrac{\sinh t}{t}] = \displaystyle\int_s^\infty L[\sinh t]d\sigma = \int_s^\infty \frac{1}{\sigma^2-1}d\sigma = \frac{1}{2}\int_s^\infty (\frac{1}{\sigma-1} - \frac{1}{\sigma+1})d\sigma$

$= \dfrac{1}{2}\Big[\log\Big(\dfrac{\sigma-1}{\sigma+1}\Big)\Big]_s^\infty = -\dfrac{1}{2}\log\Big(\dfrac{s-1}{s+1}\Big) = \dfrac{1}{2}\log\Big(\dfrac{s+1}{s-1}\Big)$

(4) $L[t(e^t+e^{2t})^2] = L[t(e^{2t}+2e^{3t}+e^{4t})] = -\dfrac{d}{ds}\Big(\dfrac{1}{s-2} + \dfrac{2}{s-3} + \dfrac{1}{s-4}\Big)$

$= \dfrac{1}{(s-2)^2} + \dfrac{2}{(s-3)^2} + \dfrac{1}{(s-4)^2}$

(5) $L[e^{-t}\sin t] = \dfrac{1}{(s+1)^2+1}$

(6) $L[e^t \cos^2 3t] = \dfrac{1}{2}L[e^t(1+\cos 6t)] = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{s-1}{(s-1)^2+36}\Big)$

(7) $L[t^2 \sinh t] = \dfrac{d^2}{ds^2}\Big(\dfrac{1}{s^2-1}\Big) = \dfrac{6s^2+2}{(s^2-1)^3}$

(8) $L[te^t \sin 6t] = -\dfrac{d}{ds}\Big(\dfrac{6}{(s-1)^2+36}\Big) = \dfrac{12(s-1)}{[(s-1)^2+36]^2}$

8. (1) $L^{-1}[\dfrac{1}{(s+2)^3}] = L^{-1}[\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{(s+2)^3}] = \dfrac{1}{2}t^2e^{-3t}$

(2) $L^{-1}[\dfrac{s}{s^2+4s+5}] = L^{-1}[\dfrac{s+2}{(s+2)^2+1} - 2\dfrac{1}{(s+2)^2+1}] = e^{-2t}\cos t - 2e^{-2t}\sin t$

(3) $L^{-1}[\dfrac{2s-1}{s^2(s+1)^3}] = L^{-1}[\dfrac{5}{s} - \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{5}{s+1} - \dfrac{4}{(s+1)^2} - \dfrac{3}{2}\dfrac{2}{(s+1)^3}] = 5 - t - 5e^{-t} - 4te^{-t} - \dfrac{3}{2}t^2$

(4) $L^{-1}[\dfrac{(s+1)^2}{(s+2)^4}] = L^{-1}[\dfrac{1}{(s+2)^2} - \dfrac{2}{(s+2)^3} + \dfrac{1}{6}\dfrac{3!}{(s+2)^4}] = te^{-2t} - t^2e^{-2t} + \dfrac{1}{6}t^3e^{-2t}$

(5) $L^{-1}[\dfrac{s}{(s^2+1)^2}] = L^{-1}[\dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{(s+1)^2}] = e^{-t} - te^{-t}$

(6) $L^{-1}[\dfrac{s+1}{(s^2+2s+2)^2}] = L^{-1}[(-\dfrac{1}{2})\dfrac{-2(s+1)}{[(s+1)^2+1]^2}] = \dfrac{1}{2}L^{-1}[-\dfrac{d}{ds}\Big(\dfrac{1}{(s+1)^2+1}\Big)] = \dfrac{1}{2}te^{-t}\sin t$

(7) $L^{-1}[\dfrac{1}{s^2+2s+5}] = L^{-1}[\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{(s+1)^2+2^2}] = \dfrac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$

(8) $L^{-1}[\dfrac{1}{s^2+6s+10}] = L^{-1}[\dfrac{1}{(s-3)^2+1^2}] = e^{3t}\sin t$

## 제 3 절  특수함수의 라플라스 변환

1. (1) $L[(t-1)u(t-1)] = \dfrac{e^{-s}}{s^2}$

(2) $L[e^{2-t}u(t-2)] = L[e^{-(t-2)}\ u(t-2)] = \dfrac{e^{-2s}}{s+1}$

(3) $L[t\ u(t-2)] = L[(t-2)\ u(t-2) + 2\ u(t-2)] = \dfrac{e^{-2s}}{s^2} + \dfrac{2e^{-2s}}{s}$

(4) $L[(3t+1)\ u(t-3)] = 3L[(t-3)\ u(t-3) + \dfrac{10}{3}\ u(t-3)] = \dfrac{3e^{-3s}}{s^2} + \dfrac{10e^{-3s}}{3s}$

(5) $L[\cos 2t\ u(t-\pi)] = L[\cos 2(t-\pi)\ u(t-\pi)] = \dfrac{se^{-\pi s}}{s^2+4}$

(6) $L[\sin t\ u(t-\dfrac{\pi}{2})] = L[\cos(t-\dfrac{\pi}{2})\ u(t-\dfrac{\pi}{2})] = \dfrac{se^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}$

(7) $L[(t-1)^3 e^{t-1}\ u(t-1)] = \dfrac{6e^{-s}}{(s-1)^4}$

(8) $L[te^{t-5}\ u(t-5)] = L[(t-5)e^{t-5}\ u(t-5) + 5e^{t-5}\ u(t-5)] = \dfrac{e^{-5s}}{(s-1)^2} + \dfrac{5e^{-5s}}{s-1}$

2. (1) $L^{-1}[\dfrac{e^{-2s}}{s^3}] = \dfrac{1}{2}(t-2)^2\ u(t-2)$

(2) $L^{-1}[\dfrac{(1+e^{-2s})^2}{s+2}] = L^{-1}[\dfrac{1}{s+2} + \dfrac{2e^{-2s}}{s+2} + \dfrac{e^{-4s}}{s+2}] = e^{-2t} + 2e^{-2(t-2)}\ u(t-2) + e^{-2(t-4)}\ u(t-$

(3) $L^{-1}[\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+1}] = \sin(t-\pi)\ u(t-\pi)$

(4) $L^{-1}[\dfrac{(e^{-2s})^2}{s^2+4}] = L^{-1}[\dfrac{e^{-4s}}{s^2+4}] = \sin 2(t-4)\ u(t-4)$

(5) $L^{-1}[\dfrac{e^{-s}}{s(s+1)}] = L^{-1}[\dfrac{e^{-s}}{s} - \dfrac{e^{-s}}{s+1}] = u(t-1) - e^{-(t-1)}\ u(t-1)$

(6) $L^{-1}[\dfrac{e^{-2s}}{s^2(s-1)}] = L^{-1}[-\dfrac{e^{-2s}}{s} - \dfrac{e^{-2s}}{s^2} + \dfrac{e^{-2s}}{s-1}] = -u(t-2) - (t-2)\ u(t-2) + e^{t-2}\ u(t-2)$

(7) $L^{-1}[\dfrac{1}{s^2} - e^{-s}\Big(\dfrac{1}{s^2} + \dfrac{2}{s}\Big) + e^{-4s}\Big(\dfrac{4}{s^2} + \dfrac{1}{s}\Big)]$

$= t - (t-1)\ u(t-1) - 2\ u(t-1) + 4(t-4)\ u(t-4) + u(t-4)$

(8) $L^{-1}[\dfrac{2s}{s^2+4} - e^{-\frac{\pi}{2}s}\dfrac{3s+1}{s^2+9} + e^{-\pi s}\dfrac{s+1}{s^2+6s+10}]$

$= L^{-1}[2\dfrac{s}{s^2+4} - 3\dfrac{se^{-\frac{\pi}{s}s}}{s^2+3^2} - \dfrac{1}{3}\dfrac{3e^{-\frac{\pi}{s}s}}{s^2+3^2} + \dfrac{(s+3)e^{-\pi s}}{(s+3)^2+1} - \dfrac{2e^{-\pi s}}{(s+3)^2+1}]$

$= 2\cos 2t - 3\cos 3(t-\dfrac{\pi}{2})\ u(t-\dfrac{\pi}{2}) - \dfrac{1}{3}\sin 3(t-\dfrac{\pi}{2})\ u(t-\dfrac{\pi}{2})$

$\quad + e^{-3(t-\pi)}\cos 3(t-\pi)\ u(t-\pi) - 2e^{-3(t-\pi)}\sin 3(t-\pi)\ u(t-\pi)$

3. (1) $L[2 - 4\ u(t-3)] = \dfrac{2}{s} - \dfrac{4e^{-3s}}{s}$

(2) $L[1-u(t-4)+u(t-5)] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-4s}}{s} + \frac{e^{-5s}}{s}$

(3) $L[\sin t - \sin t\ u(t-2\pi)] = L[\sin t - \sin(t-2\pi)\ u(t-2\pi)] = \frac{1}{s^2+1} - \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$

(4) $L[t - t\ u(t-2)] = L[t-(t-2)\ u(t-2) - 2\ u(t-2)] = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s}$

4. (1)$f(t) = L^{-1}[\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2}] = t-(t-1)\ u(t-1) = \begin{cases} \text{t} & (0 \le t < 1) \\ 1 & (t \ge 1) \end{cases}$

(2)$f(t) = L^{-1}[\frac{2}{s} - \frac{3e^{-s}}{s^2} + \frac{5e^{-2s}}{s^2}] = 2-3(t-1)\ u(t-1) + 5(t-2)\ u(t-2) =$
$\begin{cases} 2 & (0 \le t < 1) \\ \text{-3t+5} & (1 \le t < 2) \\ \text{2t-5} & (t \ge 2) \end{cases}$

5. (1) $L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} e^{-st} \sin t dt = \frac{1}{s^2+1}$

(2) $L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} e^{-st} \cos t dt = \frac{s}{s^2+1}$

(3) $L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-2as}} \Big[ \int_0^{a} e^{-st} dt - \int_a^{2a} e^{-st} dt \Big] = \frac{(1-e^{-as})^2}{s(1-e^{-2as})} = \frac{1-e^{-as}}{s(1+e^{-as})}$

$$(4)\ L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-bs}}\int_0^b \frac{a}{b}te^{-st}dt = \frac{a}{s}\Big(\frac{1}{bs} - \frac{1}{e^{bs}-1}\Big)$$

$$(5)\ L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-\pi s}}\int_0^\pi e^{-st}\sin t dt = \frac{1}{s^2+1}\frac{e^{\frac{\pi s}{2}}+e^{-\frac{\pi s}{2}}}{e^{\frac{\pi s}{2}}-e^{-\frac{\pi s}{2}}} = \frac{1}{s^2+1}\coth\frac{\pi s}{2}$$

# 제 4 절 라플라스 변환의 응용

1. (1) $L[y''(t)-6y'(t)+5y(t)] = L[3e^{2t}]$이므로 $L[y''(t)]-6L[y'(t)]+5L[y(t)] = 3L[e^{2t}]$이다. 따라서 $[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]-6[sY(s)-y(0)]+5Y(s) = \dfrac{3}{s-2}$이다.
$(s^2-6s+5)Y(s) = 2s-9+\dfrac{3}{s-2}$이므로 $Y(s) = \dfrac{2s-9}{s^2-6s+5}+\dfrac{3}{(s-2)(s^2-6s+5)}$
$= \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s-5}+\dfrac{5}{2}\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{1}{s-2}$이다. 그러므로 구하고자 하는 해는
$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \dfrac{1}{2}e^{5t}+\dfrac{1}{2}e^{t}-e^{-2t}$이다.

(2) $L[2y''(t)+3y'(t)+y(t)] = L[8e^{-2t}]$이므로 $2L[y''(t)]+3L[y'(t)]+L[y(t)] = 8L[e^{-2t}]$이다. 따라서 $2[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+3[sY(s)-y(0)]+Y(s) = \dfrac{8}{s+2}$이다.
$(2s^2+3s+1)Y(s) = -8s-8+\dfrac{8}{s+2}$이므로 $Y(s) = \dfrac{-8s-8}{2s^2+3s+1}+\dfrac{8}{s+2}$
$= -\dfrac{10}{3}\dfrac{1}{s+\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{s+1}$이다. 그러므로 구하고자 하는 해는
$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = -\dfrac{10}{3}e^{-\frac{1}{2}t}+\dfrac{1}{3}e^{-2t}-e^{-t}$이다.

(3) $L[y''(t)+2y'(t)+2y(t)] = L[1]$이므로 $[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+2[sY(s)-y(0)]+2Y(s) = \dfrac{1}{s}$이다. 따라서 $(s^2+2s+2)Y(s) = -3s-5+\dfrac{1}{s}$이다.
$Y(s) = \dfrac{-3s-5}{s^2+2s+2}+\dfrac{1}{s(s^2+2s+2)}$
$= \dfrac{-3(s+1)}{(s+1)^2+1}+\dfrac{-2}{(s+1)^2+1}+\dfrac{1}{s[(s+1)^2+1]}$이다. 그러므로 구하고자 하는 해는
$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = -3e^{-t}\cos t-2e^{-t}\sin t+\displaystyle\int_0^t e^{-\tau}\sin\tau d\tau$
$= -3e^{-t}\cos t-2e^{-t}\sin t+\dfrac{1}{2}(-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t+1)$
$= -\dfrac{7}{2}e^{-t}\cos t-\dfrac{5}{2}e^{-t}\sin t+\dfrac{1}{2}$이다.

(4) $L[y''(t)-6y'(t)+9y(t)] = L[t]$이므로 $[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]-6[sY(s)-y(0)]+9Y(s) = \dfrac{1}{s^2}$이다. 따라서 $(s^2-6s+9)Y(s) = 1+\dfrac{1}{s^2}$이다.
$Y(s) = \dfrac{1}{s^2-6s+9}+\dfrac{1}{s^2(s^2-6s+9)} = \dfrac{2}{27}\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{9}\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{1}{27}\dfrac{1}{s-3}+\dfrac{10}{9}\dfrac{1}{(s-3)^2}$ 이다.

그러므로 구하고자 하는 해는 $y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \frac{2}{27} + \frac{1}{9}t - \frac{1}{27}e^{3t} + \frac{10}{9}te^{3t}$이다.

(5) $L[y'(t) + y(t)] = L[e^{-t}]$이므로 $[sY(s) - y(0)] + Y(s) = \frac{1}{s+1}$이다.
따라서 $(s+1)Y(s) = 5 + \frac{1}{s+1}$이다. $Y(s) = \frac{5}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$이므로 구하고자 하는 해는 $y(t) = L^{-1}[Y(s)] = 5e^{-t} + te^{-t}$이다.

(6) $L[y''(t) - 2y'(t) - 3y(t)] = L[6e^t]$이므로 $[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] - 2[sY(s) - y(0)] - 3Y(s) =$
다. 따라서 $(s^2 - 2s - 3)Ys = s + 1 + \frac{6}{s-1}$이다.
$Y(s) = \frac{s+1}{s^2 - 2s - 3} + \frac{6}{(s-1)(s^2 - 2s - 3)} = \frac{1}{s-3} - \frac{3}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{3}{4}\frac{1}{s+1}$이므로 구하고자 하는 해는 $y(t) = L^{-1}[y(s)] = e^{3t} - \frac{3}{2}e^t - \frac{3}{4}e^{-t}$이다.

(7) $L[y''(t) + y(t)] = L[\sin t]$이므로 $[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$이다. 따라서 $(s^2 + 1)Y(s) = s - 1 + \frac{1}{s^2+1}$이다. $Y(s) = \frac{s-1}{s^2+1} + \frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{(s^2+}$
므로 구하고자 하는 해는 $y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \cos t - \sin t + \frac{\sin t - t\cos t}{2} = \cos t - \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\,\mathrm{co}$
다.

(8) $L[y''(t) - y'(t)] = L[e^t \cos t]$이므로 $[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] - [sY(s) - y(0)] = \frac{s-1}{(s-1)^2+1}$이
다. 따라서 $(s^2 - s)Y(s) = \frac{s-1}{(s-1)^2+1}$이다.
$Y(s) = \frac{s-1}{(s^2-s)[(s-1)^2+1]} = \frac{1}{s[(s-1)^2+1]} = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s-1}{(s-1)^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^2+1}$이므로 구하고자 하는 해는 $y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^t\cos t + \frac{1}{2}e^t \sin t$이다.

(9) $L[y''(t) - 2y'(t)] = L[e^t \sinh t]$이므로 $[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] - 2[sY(0) - y(0)] = \frac{1}{(s-1)^2 -}$
다. 따라서 $(s^2 - 2s)Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2 - 1}$이다.
$Y(s) = \frac{1}{(s^2-2s)(s^2-2s)} = \frac{1}{s^2(s-2)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{4}\frac{1}{(s-2)^2}$이므로 구하고자 하는 해는 $y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}te^{2t}$이다.

(10) $L[y'''(t)+2y''(t)-y'(t)-2y(t)]=L[\sin 3t]$이므로
$[s^3Y(s)-s^2y(0)-sy'(0)-y''(0)]+2[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]-[sY(s)-y(0)]-2Y(s)=\frac{3}{s^2+9}$
다. 따라서 $(s^3+2s^2-s-2)Y(s)=1+\frac{3}{s^2+9}$이다.
$Y(s)=\frac{1}{s^3+2s^2-s-2}+\frac{3}{(s^2+9)(s^3+2s^2-s-2)}=\frac{s^2+12}{(s-1)(s+1)(s+2)(s^2+9)}$
$=\frac{13}{60}\frac{1}{s-1}-\frac{13}{20}\frac{1}{s+1}+\frac{16}{39}\frac{1}{s+2}+\frac{3}{130}\frac{s}{s^2+9}-\frac{1}{65}\frac{3}{s^2+9}$이므로 구하고자 하는 해는
$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=\frac{13}{60}e^t-\frac{13}{20}e^{-t}+\frac{16}{39}e^{-2t}+\frac{3}{130}\cos 3t-\frac{1}{65}\sin 3t$이다.

2. (1) $[sY(s)-y(0)]+Y(s)=\frac{5}{s}e^{-s}$이므로 $Y(s)=\frac{5e^{-s}}{s(s+1)}=5e^{-s}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)$이다. 따라서 구하고자 하는 해는 $y(t)=L^{-1}[Y(s)]=5u(t-1)-5e^{-(t-1)}u(t-1)$이다.

(2) $[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+4Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}$이므로 $Y(s)=\frac{1-s}{s(s^2+4)}-e^{-s}\frac{1}{s(s^2+4)}$
$=\frac{1}{4}\frac{1}{s}-\frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4}-\frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4}-e^{-s}\left(\frac{1}{4}\frac{1}{s}-\frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4}\right)$이다. 따라서 구하고자 하는 해는
$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t-\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2(t-1)\right]u(t-1)$이다.

3. (1) $[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+4Y(s)=e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2+1}$이므로
$Y(s)=\frac{s}{s^2+4}-e^{-2\pi s}\left(\frac{1}{3}\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{6}\frac{2}{s^2+4}\right)$이다. 따라서 구하고자 하는 해는
$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=\cos 2t+\left[\frac{1}{3}\sin(t-2\pi)-\frac{1}{6}\sin w(t-2\pi)\right]u(t-2\pi)$이다.

(2) $[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]-5[sY(s)-y(0)]+6Y(s)=e^{-s}\frac{1}{s}$이므로
$Y(s)=e^{-s}\frac{1}{s(s-2)(s-3)}+\frac{1}{(s-2)(s-3)}=e^{-s}\left(\frac{1}{6}\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\frac{1}{s-2}+\frac{1}{3}\frac{1}{s-3}\right)-\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s-3}$이
다. 따라서 구하고자 하는 해는
$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{2}e^{2(t-1)}+\frac{1}{3}e^{3(t-1)}\right]u(t-1)-e^{2t}+e^{3t}$이다.

4. (1) $L[f(t)]+L[t]L[f(t)]=L[t]$이므로 $F(s)+\frac{1}{s^2}F(s)=\frac{1}{s^2}$이다. 즉 $F(s)=\frac{1}{s^2+1}$이

므로 구하고자 하는 해는 $f(t) = L^{-1}[F(s)] = \sin t$이다.

(2) $L[f(t)] = L[te^t] + L[t]L[f(t)]$이므로 $F(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s^2}F(s)$이다. 즉
$F(s) = \frac{s^2}{(s-1)^2(s^2-1)} = \frac{s^2}{(s+1)(s-1)^3} = \frac{1}{8}\frac{1}{s-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{4}\frac{2}{(s-1)^3} - \frac{1}{8}\frac{1}{s+1}$이
므로 구하고자 하는 해는 $f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{8}e^t + \frac{3}{4}te^t + \frac{1}{4}t^2e^t - \frac{1}{8}e^{-t}$이다.

(3) $L[f(t)] = L[\cos t] + L[e^{-t}]L[f(t)]$이므로 $F(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s+1}F(s)$이다. 즉
$F(s) = \frac{s+1}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}$이므로 구하고자 하는 해는 $f(t) = L^{-1}[F(s)] = \cos t + \sin t$이
다.

(4) $L[f'(t)] = L[1] - L[\sin t] - L[1]L[f(t)]$이므로 $sF(s) - f(0) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s}F(s)$이
다. 즉 $F(s) = \frac{s^3 - s^2 + s}{s(s^2+1)^2} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{2}\frac{2s}{(s^2+1)^2}$이므로 구하고자 하는 해는
$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \sin t - \frac{1}{2}t\sin t$이다.

5. (1) $L[y''(t) + 2y'(t) + y(t)] = L[f(t)]$이므로 $[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 2[sY(0) - y(0)] + Y(s)$
$= \frac{e^{-s}}{s} - \frac{2e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s}$이다. 따라서
$(s+1)^2Y(s) = \frac{e^{-s}}{s} - 2\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s}$이다. $Y(s) = \frac{e^{-s}}{s(s+1)^2} - 2\frac{e^{-2s}}{s(s+1)^2} + \frac{e^{-3s}}{s(s+1)^2}$
$= \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}\right]e^{-s} - 2\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}\right]e^{-2s} + \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}\right]e^{-3}$이
므로 구하고자 하는 해는
$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = [1 - e^{-(t-1)} - (t-1)e^{-(t-1)}]u(t-1)$
$-2[1 - e^{-(t-2)} - (t-2)e^{-(t-2)}]u(t-2) + [1 - e^{-(t-3)} - (t-3)e^{-(t-3)}]u(t-3)$이다.

(2) $f(t) = \cos 2t\ u(t - \frac{\pi}{4}) - \cos 2t\ u(t-\pi) = \sin 2(t - \frac{\pi}{4})\ u(t - \frac{\pi}{4}) - \cos 2(t-\pi)\ u(t-\pi)$이
므로 $L[y''(t) + y(t)] = L[f(t)]$에 의하여 $[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + Y(s) = -\frac{2e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2+4} - \frac{se^{-\pi s}}{s^2+4}$이
다.
$Y(s) = -e^{-\frac{\pi}{4}s}\frac{2}{(s^2+4)(s^2+1)} - e^{-\pi s}\frac{s}{(s^2+4)(s^2+1)}$

$= -\dfrac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{4}s}(2\dfrac{1}{s^2+1} - \dfrac{2}{s^2+4}) - \dfrac{1}{4}e^{-\pi s}(\dfrac{s}{s^2+1} - \dfrac{s}{s^2+4})$므로 구하고자 하는 해는
$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \dfrac{1}{4}\Big[2\sin(t-\dfrac{\pi}{4}) - \sin 2(t-\dfrac{\pi}{4})\Big]u(t-\dfrac{\pi}{4}) - \dfrac{1}{4}\Big[\cos(t-\pi) - \cos 2(t-\pi)\Big]u(t-$
다.