제 1 장

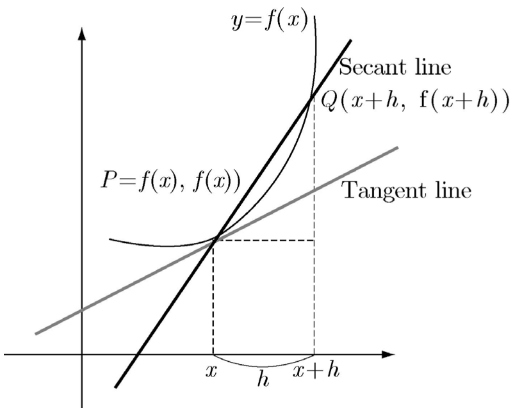
미분법과 적분법

▶▶ 이 장에서는 하나의 양이 또 다른 양에 관하여 어떻게 변화하는가에 대하여 관심을 가지는 미분학에 대하여 알아보고자 한다. 미분학의 중심 개념은 접선의 기울기와 속도의 자연적인 파생물인 도함수이다. 도함수의 정의를 알아보고 계산방법을 익힌 후에 변화율과 근삿값과 관련된 여러 가지 문제를 해결한다.

1.1 도함수

1.1.1 도함수와 미분 공식

함수 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $P(x,f(x))$와 또 하나의 점 $Q(x+h,f(x+h))$를 지나는 직선(할선)의 기울기는 $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$로 나타난다. 이때, $h>0$ 또는 $h<0$, $h \neq 0$이다. 이제 점 P를 고정하고 점 Q를 곡선 $f(x)$를 따라 P에 한없이 가까이 접근시



키면 점 PQ를 지나는 직선은 점 P를 축으로 하여 회전한다. h의 값에 따라 얻어지는 직선들의 극한으로서 점 P를 지나는 하나의 직선을 얻을 수 있고 이 직선을 점 P에서의 접선이라 한다. 이때 이 접선의 기울기는 할선의 기울기에 대한 극한 과정을 통하여 얻을 수 있다.

[정의] 주어진 함수 $y=f(x)$에 대하여 극한

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

가 존재할 때 함수 $y=f(x)$는 점 x에서 미분 가능하다고 하고 이 극한을 점 x에서의 미분계수라고 한다. 이것을 간단히

$$f'(x),\ \frac{d}{dx}y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df(x)}{dx},\ D_f(x),\ \cdots$$

등으로 나타낸다.

함수 f의 정역의 각 점에서 f가 미분 가능하면 f를 미분 가능한 함수라 한다. 이때 x에 대하여 $f'(x)$를 대응시켜 주는 함수 $f'(x)$를 함수 $f(x)$의 도함수(derivative function)라 한다. 이때, 주어진 점 $(x_0,\ f(x_0))$를 지나고 기울기가 $f'(x_0)$인 직선을 이 점에서 함수 f의 접선이라 한다.

어떤 함수의 도함수를 구할 때 도함수의 정의를 이용하여 직접 구해야 한다면 그 계산은 매우 지루하고 때로는 극한을 계산할 때 고도의 기교를 필요로 하게 될 것이다. 그러나 다행히 정의를 직접 사용하지 않고 도함수를 구하는 여러 가지 방법이 있다. 이러한 공식들은 주어진 함수의 도함수를 구하는데 그 계산을 매우 간단히 해준다.

정리 1

함수 $f(x)$와 $g(x)$가 미분 가능할 때 다음이 성립한다.

(1) $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$

(2) $(kf)'=kf'(x)$

(3) $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

증명 (1)의 증명 : $F(x)=f(x)+g(x)$라 하면

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x))\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=f'(x)+g'(x)$$

(3)의 증명 : $F(x)=f(x)g(x)$라 하면

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)g(x+h)\}-\{f(x)g(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}f(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}g(x)$$

$$=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$$ □

예제 1

함수 $f(x)=(3x^2)(6x^4)$의 도함수를 구하여라.

풀이 곱의 공식을 이용하면

$$f'(x)=(3x^2)'(6x^4)+(3x^2)(6x^4)=(6x)(6x^4)+(3x^2)(24x^3)$$

$$=36x^5+72x^5=108x^5$$

예제 2

함수 $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$의 도함수를 구하여라.

풀이 나눗셈의 공식을 이용하면

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+3}{x-1}\right)' = \frac{(x^2+3)'(x-1)-(x^2+3)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

■

정리 2

실수 n에 대하여

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

이 성립한다.

■

예제 3

함수$f(x) = \sqrt[3]{x}$ 의 도함수를 구하여라.

풀이 $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ 이므로 $f'(x) = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

■

함수 $y=(x+2)^2$의 도함수를 구하기 위하여 이를 전개하여 $y = x^2+4x+4$의 도함수를 구할 수 있다. 그러나 $y=(x+2)^{155}$와 같은 경우는 이를 전개하여 해결한다는 것은 결코 간단한 일이 아니다. 따라서 이와 같은 경우에는 주어진 함수 y를 $y=u^{155}$과 $u=x+2$의 합성 함수로 보고 합성 함수의 미분법을 이용하는 것이 더욱 편리하다.

정리 3

함수 f가 x에서 미분가능하고 함수 g가 $f(x)$에서 미분 가능할 때 이들의 합성함수 $g \circ f$도 미분가능하고

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) \quad \text{또는} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

이다.

예제 4

함수 $f(x)=\left(\dfrac{x-5}{x^2+3}\right)^5$ 의 도함수를 구하여라.

풀이 $\dfrac{x-5}{x^2+3}=u$라 하면 $f(u)=u^5$로 볼 수 있다. 이것을 u로 미분하면 $f'(u)=5u^4$이고 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{(x-5)'(x^2+3)-(x-5)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\dfrac{3+10x-x^2}{(x^2+3)^2}$이므로 $f(x)=\left(\dfrac{x-5}{x^2+3}\right)^5$의 도함수는 $f'(x)=5\left(\dfrac{x-5}{x^2+3}\right)^4\cdot\dfrac{3+10x-x^2}{(x^2+3)^2}$이다.

예제 5

함수 $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$ 의 도함수는

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\left(\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}\right)$$

이다.

1.1.2 삼각 함수의 도함수

삼각함수의 도함수를 구하기 전에 중요하게 쓰이는 두 가지 극한 값에 대하여 먼저 알아보도록 하자.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0$

위 극한값을 이용하여 삼각함수의 도함수를 구해 보도록 하자. 특히 모든 실수 x

에 대하여 $f(x)=\sin x$로 정의 되는 함수를 취급할 경우 $\sin x$는 라디안(radian)으로 주어지는 각 x에 대한 sine을 나타내는 것으로 한다. 그리고 다른 삼각함수들 (cos, tan, cot, csc, sec)에 대하여도 동일하게 취급한다.

먼저 $f(x)=\sin x$의 도함수를 구하여 보자.

도함수의 정의에 의해

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{x}$$

이다. 이때 $\sin(x+h)=\sin x\cos h+\cos x\sin h$이므로

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{x}$$

이다. 다시 분자를 $\sin x$로 묶으면

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}+\frac{\cos x\sin h}{h}\right\}$$

을 얻는다. 극한의 성질에 의해

$$= \lim_{h\to 0}\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\left\{\frac{(\cos h-1)}{h}\right\}+\lim_{h\to 0}\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

이다. 이때 위의 극한 (1)과 (2)을 사용하면

$$(\sin x)' = \cos x$$

임을 알 수 있다.

같은 방법으로 삼각함수의 성질 $\cos(x+h)=\cos x\cos h-\sin x\sin h$과 위의 극한 (1), (2)를 이용하여 $f(x)=\cos x$의 도함수를 구하면 $(\cos x)'=-\sin x$임을 알 수 있다. 나머지 삼각함수에 대한 도함수도 같은 방법으로 구할 수 있지만 함수의 미분공식과 연쇄 법칙을 사용하여 구하면 다음과 같다.

삼각함수의 도함수

(1) $(\sin x)'=\cos x$

(2) $(\cos x)'=-\sin x$

(3) $(\tan x)'=\sec^2 x$

(4) $(\cot x)'=-\csc^2 x$

(5) $(\sec x)'=\sec x\tan x$

(6) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

증명 $f(x) = \tan x$ 의 경우만 확인하여보자.

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

임을 알 수 있다. □

주 일반적으로 $(\sin ax)' = a\cos ax$ 이고 $(\cos ax)' = -a\sin ax$ 이다.

예제 1

다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $f(x) = (\sin 5x)^2$　　(2) $f(x) = \sin(\cos x)$

(3) $f(x) = \cos(\sin^2 x)$　　(4) $f(x) = \sin(\cos^3 5x)$

풀이 (1) $((\sin 5x)^2)' = 2(\sin 5x)\cdot 5\cos 5x = 10(\sin 5x)\cos 5x$

(2) $(\sin(\cos x))' = \cos(\cos x)\cdot(-\sin x) = -\sin x\cos(\cos x)$

(3) $(\cos(\sin^2 x))' = -\sin(\sin^2 x)\cdot(2\sin x)\cdot\cos x = -2\sin x\sin(\sin^2 x)\cdot\cos x$

(4) $(\sin(\cos^3 5x))' = \cos(\cos^3 5x)\cdot(3\cos^2 5x)\cdot(-5\sin 5x)$ ■

1.1.3 음함수의 미분법

앞 절에서 다루었던 미분법은 함수에 대한 방법들이었다. 이제 음함수에 대한 미분법에 대하여 알아보자. 음함수는 주어진 곡선의 식을 $y = f(x)$ 꼴의 함수로 표현할 수 없는 경우를 말한다. 이때 도함수 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하기 위해서는 주어진 음함수의 식에서 y를 x에 관한 대단히 복잡한 식이라 생각하고 연쇄 법칙을 이용하여 구한다.

예제 1

$y = (x^3 - 3x^2 + 4)^2$ 에서 도함수는 $\frac{dy}{dx} = 2(x^3 - 3x^2 + 4)(3x^2 - 6x)$ 이다.

예제 2

$x^2+y^2=5$에서 도함수 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하여라.

풀이 각 항을 미분하면 x^2의 도함수는 $2x$, y^2의 도함수는 $2y\dfrac{dy}{dx}$이고 5의 도함수는 0이다. 따라서 $2x+2y(\dfrac{dy}{dx})=0$이고 이 식으로부터 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$를 얻는다. ■

예제 3

원의 방정식 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(3,\ 4)$에서 접하는 접선의 방정식을 구하여라.

풀이 원의 방정식에 대한 도함수는 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$이고 점 $(3,\ 4)$에서 $x=3$, $y=4$이므로 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3}{4}$이다. 따라서 $(3,\ 4)$에서 원에 대한 접선의 방정식은

$$y-4=-\frac{3}{4}(x-3) \quad \text{또는} \quad 3x+4y=25$$

이다. ■

예제 4

$\sqrt{xy}-5x=y^2$에서 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하여라.

풀이 $\sqrt{xy}-5x=y^2$에서 y를 x에 관한 함수로 보고 양변을 x에 관하여 미분한다. xy에 곱셈 공식을 적용하여 미분하면

$$\frac{1}{2\sqrt{xy}}\cdot(y+xy')-5=2y\cdot y'$$

이 된다. 이제 y'에 관하여 정리하면

$$y'=\frac{10\sqrt{xy}-y}{x-4y\sqrt{xy}}$$

이다. ■

함수 $y=f(x)$의 도함수 $f'(x)$도 하나의 함수이다. 따라서 $f'(x)$가 미분 가능할 때 그 도함수를 함수 $y=f(x)$의 **이계도함수**라 하고

$$y'',\ f''(x),\ \frac{d^2y}{dx^2},\ D^2f(x),\ \cdots$$

등으로 나타낸다.

일반적으로 함수 $y=f(x)$를 x에 관하여 n번 미분한 결과를 함수 $y=f(x)$의 n**계(n-order) 도함수**라 하고 기호로

$$y^{(n)},\ f^{(n)}(x),\ \frac{d^ny}{dx^n},\ D^nf(x),\ \cdots$$

등으로 나타낸다.

예제 5

$f(x)=\sin x$의 100계 도함수를 구하여라.

풀이 $f(x)=\sin x,\ f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,\ f^{(3)}(x)=-\cos x$

$f^{(4)}(x)=\sin x,\ f^{(5)}(x)=\cos x\ \cdots$

따라서 $f^{(100)}(x)=\sin x$이다.

예제 6

$f(x)=x^n$의 n계 도함수를 구하여라.

풀이

$$f'(x)=nx^{n-1}$$

$$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}$$

$$f'''(x)=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$f^n(x)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))x^{n-n}=n!$$

일반적으로 n차 다항식을 n번 미분하면 $n!$이고 $n+1$번 미분하면 0이다.

예제 7

$f(x)=x^5+2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$ 의 6계도함수를 구하여라.

풀이 5차 다항식을 6번 미분한 것이므로 도함수는 0이다.

예제 8

$f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ 의 2계 도함수를 구하여라.

풀이 $f'(x)=\dfrac{(x-2)-x}{(x-2)^2}=-\dfrac{2}{(x-2)^2}$ 이고 다시 한 번 미분하면

$$f''(x)=\left(-\frac{2}{(x-2)^2}\right)'=-\frac{0-2\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{4}{(x-2)^3}$$

1.1.4 역도함수

[정의] 구간 I에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 I안의 모든 점 x에서

$$F'(x)=f(x)$$

를 만족하는 함수 $F(x)$를 $f(x)$의 **역도함수**(anti-derivative function) 또는 **부정적분**(indefinite integral)이라 한다.

예제 1

x^2의 도함수는 $2x$이므로 $2x$의 역도함수는 x^2이다.

예제 2

$\sin x$의 도함수가 $\cos x$이므로 $\cos x$의 역도함수는 $\sin x$이다.

함수 $f(x)$의 역도함수 $F(x)$를 기호로 $\int f(x)dx$로 나타낸다. 즉

$$\int f(x)dx = F(x)$$

이다. 여기서 기호 $\int$를 **적분 기호**, 함수 $f(x)$를 **피적분함수** 그리고 x를 **적분 변수**라 한다.

예제 3

$\int 2x dx = x^2$ 그리고 $\int \cos x dx = \sin x$로 나타낸다.

함수 $f(x) = 2x$에 대하여 $\int 2x dx = x^2 + 1$, $\int 2x dx = x^2 - 5$, $\int 2x dx = x^2$이 모두 성립한다. 여기에서 알 수 있듯이 임의로 선택된 상수 C에 대하여 $\int f(x)dx = F(x) + C$가 성립하고 이때 C를 **적분 상수**라 한다. 즉 어떤 함수의 역도함수는 존재할 경우 무수히 많이 존재하게 된다. 그러므로 $\int 2x dx = x^2 + C$ 그리고 $\int \cos x dx = \sin x + C$로 쓴다.

극한이나 미분의 계산에서 선형적 성질이 성립하듯이 역도함수를 계산할 때도 역시 선형적 성질을 갖는다. 즉, 역도함수는 다음과 같은 성질을 갖는다.

부정적분의 성질

(1) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, 단 k는 상수

(2) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

예제 4

$\int (x^2 - 2x + 4)dx$를 구하여라.

풀이
$$\int (x^2-2x+4)dx = \int x^2 dx + \int (-2x)dx + \int 4dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3 + C_1 - x^2 + C_2 + 4x + C_3$$
$$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x + C \quad (C = C_1 + C_2 + C_3)$$

예제 5

시간 t에서 속도가 $3t^2+2t-3$인 직선 위를 움직이고 있는 물체가 있다. 이 물체의 시각 $t=1$에서의 위치가 3일 때 시각 $t=3$일 때의 위치는 어디인지 구하여라.

풀이 속도 $v(t)=3t^2+2t-3$는 움직이는 물체의 위치 함수의 도함수이므로 속도함수를 적분하면

$$s(t) = \int v(t)dt = t^3 + t^2 - 3t + C$$

이다. 최초 시각 $t=1$일 때 위치가 3이므로

$$3 = s(1) = (1)^3 + (1)^2 - 3 \cdot (1) + C$$

로부터 $C=4$이다. 따라서 위치 함수는

$$s(t) = t^3 + t^2 - 3t + 4$$

을 얻는다. 그러므로 시각 $t=3$일 때의 위치는

$$s(3) = (3)^3 + (3)^2 - 3 \cdot (3) + 4 = 31$$

이다.

1.1 연습문제

1. 다음 각 극한은 어떤 점 a에서의 어떤 함수 f에 대한 도함수이다. 각 경우에 대하여 f와 a를 결정하여라.

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^5-1}{h}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{2^x-8}{x-3}$

(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos(\pi+h)+1}{h}$

2. 도함수의 정의를 이용하여 주어진 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $f(x)=55$　　(2) $f(x)=2-x^2$

(3) $f(x)=\sqrt{3+2x}$　　(4) $f(x)=x^3$

3. 다음 함수를 미분하여라.

(1) $f(x)=\pi^2$　　(2) $f(x)=3x+5$

(3) $f(x)=2x^3+4x^2-5x+6$　　(4) $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$

(5) $V(r)=\dfrac{4}{3}\pi r^3$　　(6) $T(s)=(5s)^{\frac{1}{2}}$

(7) $y=x^{-\frac{3}{7}}$　　(8) $v(t)=t^2-\dfrac{1}{\sqrt[5]{t^3}}$

(9) $y=\dfrac{t^3-3t\sqrt{t}}{t}$　　(10) $y=\sqrt[5]{u}\,(u^3-u+u^{-3})$

4. 곡선 $y=x+\sqrt{x}$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서 접하는 접선의 방정식을 구하여라.