전공수학
(단원별 기출문제)

Practice makes perfect

전공수학

- 해석학
- 벡터해석학
- 선형대수학
- 미분기하학
- 복소해석학
- 정수론
- 현대대수학
- 위상수학
- 이산수학
- 확률 및 통계

해석학
(단원별 기출문제)

Practice makes perfect

2002학년도부터 2020학년도까지 12개 단원 64문항 출제

- 실수체계(1)
- 수열(5)
- 연속(4)
- 균등연속(2)
- 미분(12)
- 리만적분(7)
- 특이적분(3)
- Riemann-Stieltjes 적분(1)
- 급수의 수렴, 발산 판정(7),
- 함수열의 평등수렴(9)
- 함수열 급수의 평등수렴(6)
- Taylor 정리(7)

해석학	2002	2003	2004
실수체계			
수열			#8, 4점
연속			
균등연속			
미분			
리만적분	#8, 5점		#9, 6점
특이적분			
Riemann-Stieltjes 적분			
급수의 수렴, 발산 판정			
함수열의 평등수렴	#7, 5점		
함수열 급수의 평등수렴		#12, 5점	
Taylor 정리		#11-1, 3점	
計	2	2	2

해석학	2005	2006	2007
실수체계	#14, 5점		
수열			
연속			
균등연속			
미분	#13, 4점	#8, 4점	
리만적분		#14, 5점	
특이적분			
Riemann-Stieltjes 적분			#13, 4점
급수의 수렴, 발산 판정	#12, 4점		#8, 4점
함수열의 평등수렴		#13, 4점	
함수열 급수의 평등수렴			
Taylor 정리			#19, 5점
計	3	3	3

해석학	2008	2009	2010
실수체계			
수열		전공1차, #23, 1.5점	전공1차, #29, 1.5점
연속	#11, 5점	전공1차, #24	
균등연속			전공1차, #30, 1.5점
미분		전공1차, #25	전공1차, #32, 2.5점
리만적분	#13, 4점	전공1차, #26	
특이적분			
Riemann-Stieltjes 적분			
급수의 수렴, 발산 판정			
함수열의 평등수렴			
함수열 급수의 평등수렴		전공1차, #27, 2.5점	전공1차, #33, 2.5점
Taylor 정리	#12, 4점	전공2차, #4 (복소)	전공1차, #31 (복소)
計	3	6	5

해석학	2011	2012	2013
실수체계			
수열			전공1차, #26
연속	전공1차, #25		
균등연속			전공1차, #23
미분	전공1차, #26	전공1차, #25	전공1차, #24
리만적분	전공1차, #23		
특이적분		전공1차, #27	전공1차, #22
Riemann-Stieltjes 적분			
급수의 수렴, 발산 판정	전공1차, #24	전공1차, #22, 1.5점 전공1차, #24, 2.5점	전공1차, #21
함수열의 평등수렴		전공1차, #26	전공1차, #25
함수열 급수의 평등수렴	전공1차, #27, 2.5점		
Taylor 정리		전공2차, #2, 20점	
計	5	6	6

해석학	2014	2015	2016
실수체계			
수열			
연속	전공A, 서술형 #4, 4점		
균등연속			
미분	전공A, #9, 2점	전공A, #3, 2점	전공A, #11, 4점
리만적분		전공B, 논술형 #2, 10점	
특이적분			전공A, #3, 2점
Riemann-Stieltjes 적분			
급수의 수렴, 발산 판정	전공A, #8, 2점		
함수열의 평등수렴	전공A, #10, 2점		
함수열 급수의 평등수렴			전공B, #4, 4점
Taylor 정리			
計	4	2	3

해석학	2017	2018	2019
실수체계			
수열			전공B, #7, 5점
연속			
균등연속			
미분		전공A, #11, 4점	
리만적분			
특이적분			
Riemann-Stieltjes 적분			
급수의 수렴, 발산 판정			
함수열의 평등수렴	전공B, #4, 4점	전공A, #3, 2점	전공A, #11, 4점
함수열 급수의 평등수렴		전공B, #7, 5점	
Taylor 정리	전공B, #7, 5점		
計	2	3	2

해석학	2020		
실수체계			
수열			
연속			
균등연속			
미분	전공A, #12, 4점		
리만적분			
특이적분			
Riemann-Stieltjes 적분			
급수의 수렴, 발산 판정			
함수열의 평등수렴	전공B, #9, 4점		
함수열 급수의 평등수렴			
Taylor 정리			
計	2		

$E \subset \mathbb{R}$ 를 공집합이 아닌 집합이라 하자.
(i) E 를 **위로 유계(bounded above)**인 집합이라고 하는 것은 적당한 $M \in \mathbb{R}$ 이 존재해서 모든 $a \in E$ 에 대하여 $a \leq M$ 일 때이다.
이때, M 을 E 의 **상계(upper bound)**라고 한다.

(ii) 수 s 를 집합 E 의 **상한(supremum)**이라고 하는 것은 s 가 E 의 상계이고 E 의 모든 상계 M 에 대하여 $s \leq M$ 일 때이다.
이때, E 의 유한인 상한 s 가 존재한다고 하고 $s = supE$ 로 표기한다.

<보기>

$sup[0,\ 1]$?

$E = [0,\ 1]$ 로 두자.

$x \in E$ 에 대하여 $0 \leq x \leq 1$ 이므로 1은 E 의 상계이다.

M 을 E 의 임의의 상계라고 하자. 그러면, $1 \in E$ 이므로 $1 \leq M$ 이다.

따라서, 1 은 E 의 가장 작은 상계이므로 $supE = 1$ 이다.

완비성 공리(Completeness Axiom) :

E 가 $\mathbb{R}$ 의 공집합이 아닌 부분 집합으로 위로 유계이면

E 의 유한인 상한이 존재한다.

***Archimedes 의 원리 :**

주어진 두 실수 a 와 b 에 대하여 $a > 0$ 일 때,

적당한 $n \in \mathbb{N}$ 이 존재해서 다음 부등식이 성립한다.

$$na > b$$

<보기>

$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots\right\}$, $B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\right\}$ 에 대하여 $supA$, $supB$?

1 이 두 집합의 상계임은 명백하다.

M 이 A 의 임의의 상계이면 $1 \in A$ 이므로 $1 \leq M$ 이다.

따라서, $supA = 1$이다.

M 이 B 의 상계이고 $M < 1$ 이면 $1 - M > 0$ 이다.

그러면, Archimedes의 원리에 의해 적당한 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여

$$n(1 - M) > 1$$

그런데,

$$1 - M > \frac{1}{n}\ ,\ 1 - \frac{1}{n} > M\ ,\ 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \in B$$

이것은 M 이 B 의 상계라는 가정에 모순이다.

따라서, 1은 B 의 최소상계이므로 $supB = 1$ 이다.

(2005학년도, #14)

유리수 집합 $\mathbb{Q}$가 실수 집합 $\mathbb{R}$에서 조밀(dense)함을 증명하시오.
즉, x 와 y 가 실수이고 $x < y$이면, $x < r < y$ 를 만족시키는
유리수 r 이 존재함을 보이시오. [5점]

[풀이]

주어진 조건에 의해 $y - x > 0$ 이므로 Archimedes 의 원리로부터
적당한 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여

$$n(y - x) > 1$$

또한, 적당한 $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$에 대하여 $n_1(1) > x$, $n_2(1) > -x$가 성립하므로

$$-n_2 < x < n_1$$

$-n_2 < m < n_1$인 $m \in \mathbb{Z}$에 대하여 $m - 1 < nx < m$ 이면

$$nx < m < 1 + nx < ny,\ nx < m < ny,\ x < \frac{m}{n} < y$$

따라서, 적당한 $r = \frac{m}{n} (\in \mathbb{Q})$이 존재해서 $x < r < y$ 를 만족시킨다.

□

벡터해석학
(단원별 기출문제)

Practice makes perfect

2002학년도부터 2020학년도까지 7개 단원 17문항 출제

- 다변수함수의 연속(1)
- 다변수함수의 미분(1)
- 편도함수의 극댓값과 극솟값(1)
- 반복적분, 다중적분(8)
- 선적분(2)
- Green 의 정리(3)
- 곡면적분(1)

벡터해석학	2002	2003	2004
다변수함수의 연속			
다변수함수의 미분			
편도함수의 극댓값과 극솟값			
반복적분, 다중적분			
선적분	#12-2, 2점		
Green 의 정리			
곡면적분			
計	1	0	0

벡터해석학	2005	2006	2007
다변수함수의 연속			
다변수함수의 미분			
편도함수의 극댓값과 극솟값			
반복적분, 다중적분			
선적분			
Green 의 정리			
곡면적분	#16, 3점		
計	1	0	0

벡터해석학	2008	2009	2010
다변수함수의 연속			
다변수함수의 미분			
편도함수의 극댓값과 극솟값			
반복적분, 다중적분			전공1차, #34, 1.5점
선적분			
Green 의 정리		전공1차, #28	
곡면적분			
計	0	1	1

벡터해석학	2011	2012	2013
다변수함수의 연속			
다변수함수의 미분	전공1차, #26		
편도함수의 극댓값과 극솟값			
반복적분, 다중적분	전공1차, #28	전공1차, #23	
선적분			
Green 의 정리			
곡면적분			
計	2	1	0

벡터해석학	2014	2015	2016
다변수함수의 연속			
다변수함수의 미분			
편도함수의 극댓값과 극솟값			
반복적분, 다중적분	전공A, #7, 2점		전공A, #5, 2점
선적분			전공A, #4, 2점
Green 의 정리		전공A, #2, 2점	
곡면적분			
計	1	1	2

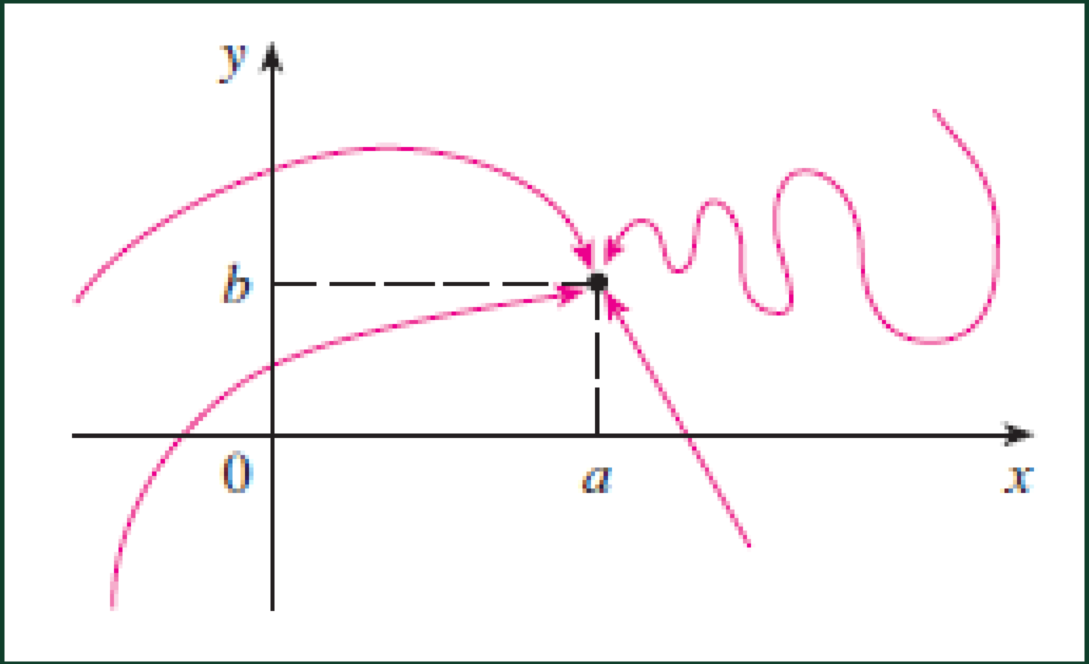
벡터해석학	2017	2018	2019
다변수함수의 연속			전공A, #3, 2점
다변수함수의 미분			
편도함수의 극댓값과 극솟값	전공A, #5, 2점		
반복적분, 다중적분	전공A, #4, 2점	전공A, #4, 2점	전공A, #4, 2점
선적분			
Green 의 정리			
곡면적분			
計	2	1	2

벡터해석학	2020		
다변수함수의 연속			
다변수함수의 미분			
편도함수의 극댓값과 극솟값			
반복적분, 다중적분			
선적분			
Green 의 정리	전공A, #2, 2점		
곡면적분			
計	1		

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

일 때, 이변수 함수 $f(x,y)$ 는 (a,b) 에서 **연속**이라고 한다.

일변수 함수에서는 x 가 a 에 근접하는 경우 단 두 가지 방향이(좌,우) 존재하지만 이변수 함수의 경우에는 단순하지가 않다.
왜냐하면 (x,y)가 무수히 많은 방향에서 (a,b)에 근접할 수 있기 때문이다.



<보기>

극한 값은?

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ (3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ (4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3x^2y}{x^2+y^2}$

[풀이]

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0,y=0}\frac{x^2}{x^2}=\mathbf{1}$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x=0,y\to0}\frac{-y^2}{y^2}=-\mathbf{1}$

따라서, 극한 값이 다른 경로가 존재하므로 주어진 극한 값은 존재하지 않는다.

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0,y=0}\frac{0}{x^2}=\mathbf{0}$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0,y=x}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$

따라서, 극한 값이 다른 경로가 존재하므로 주어진 극한 값은 존재하지 않는다.

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to0,y=0}\frac{0}{x^2}=\mathbf{0}$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x=y^2,y\to0}\frac{y^4}{2y^4}=\frac{1}{2}$

따라서, 극한 값이 다른 경로가 존재하므로 주어진 극한 값은 존재하지 않는다.

(4) $\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} \leq 3|y|$ ($\because \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$),

$$|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ 으로 선택하면

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \text{ 일 때, } \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq 3|y| \leq 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\delta = \varepsilon$$

따라서,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

(2019학년도 1차 시험(전공A), #3)

다음과 같이 정의된 함수 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 가 $(0,0)$에서 연속이 되도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하시오. [2점]

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^n y^n}{x^{30}+y^{30}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[풀이]

f가 $(0,0)$ 에서 연속이면

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

그러면, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ 이다.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^n y^n}{x^{30}+y^{30}} = \lim_{x\to 0, y=x} \frac{x^{2n}}{2x^{30}} = \lim_{x\to 0} x^{2n-30}$$

이므로 극한 값이 0 이 되는 자연수 n 의 최솟값은

$$16$$

□

선형대수학
(단원별 기출문제)

Practice makes perfect

2002학년도부터 2020학년도까지 8개 단원 25문항 출제

- 부분공간과 일차독립(1)
- 수반행렬(1)
- 고유값과 고유벡터(3)
- 선형변환(7)
- 차원, 계수(rank)(4)
- 사영정리(3)
- 기저에 관련된 좌표(2)
- 대각화(4)

선형대수학	2002	2003	2004
부분공간과 일차독립			
수반행렬			
고유값과 고유벡터			#5, 5점
선형변환	#9, 5점		
차원, 계수(rank)			
사영정리		#7, 5점	
기저에 관련된 좌표			
대각화			
計	1	1	1

선형대수학	2005	2006	2007
부분공간과 일차독립			
수반행렬			
고유값과 고유벡터			
선형변환		#7, 4점	
차원, 계수(rank)	#11, 5점		
사영정리			
기저에 관련된 좌표			
대각화			#7, 4점
計	1	1	1

선형대수학	2008	2009	2010
부분공간과 일차독립			
수반행렬			
고유값과 고유벡터			
선형변환	#10, 4점	전공1차, #16	전공1차, #23
차원, 계수(rank)			전공1차, #24, 1.5점
사영정리			
기저에 관련된 좌표			
대각화		전공1차, #15, 1.5점	
計	1	2	2

선형대수학	2011	2012	2013
부분공간과 일차독립			전공1차, #13, 1.5점
수반행렬	전공1차, #15		
고유값과 고유벡터			
선형변환			
차원, 계수(rank)		전공1차, #14 전공1차, #15	
사영정리			전공1차, #14, 2.5점
기저에 관련된 좌표			
대각화	전공1차, #16		
計	2	2	2

선형대수학	2014	2015	2016
부분공간과 일차독립			
수반행렬			
고유값과 고유벡터		전공A, #4, 2점	
선형변환	전공A, 기입형 #13, 2점 전공B, 논술형 #2, (복소)		
차원, 계수(rank)			
사영정리			
기저에 관련된 좌표			전공B, #3, 4점
대각화			
計	2	1	1

선형대수학	2017	2018	2019
부분공간과 일차독립			
수반행렬			
고유값과 고유벡터		전공B, #3, 4점	
선형변환			
차원, 계수(rank)			
사영정리			전공A, #13, 4점
기저에 관련된 좌표	전공B, #3, 4점		
대각화			
計	1	1	1

선형대수학	2020		
부분공간과 일차독립			
수반행렬			
고유값과 고유벡터			
선형변환			
차원, 계수(rank)			
사영정리			
기저에 관련된 좌표			
대각화	전공B, #6, 4점		
計	1		

$\boldsymbol{R^n}$ 의 벡터들로 이루어진 공집합이 아닌 집합이 스칼라 곱과 덧셈에 대하여 닫혀 있으면 이 집합을 $\boldsymbol{R^n}$ 의 **부분 공간(subspace)**이라 부른다.

$\boldsymbol{R^n}$ 의 부분공간 $\boldsymbol{W}$ 가

$$\boldsymbol{W = \{t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + \cdots + t_s\vec{v}_s | t_1,\ t_2\ ,\ \cdots\ ,\ t_s \in R\}}$$

일 때 다음과 같이 표기한다.

$$\boldsymbol{W = span\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_s\}}$$

특히, $\boldsymbol{t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + \cdots + t_s\vec{v}_s = 0}$ 을 만족시키는 유일한 스칼라 $\boldsymbol{t_i (1 \le i \le s)}$ 가 모두 $\boldsymbol{0}$ 일 때 $\boldsymbol{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_s}$ 는 **일차 독립(linearly independent)**이라고 한다. 이때, $\boldsymbol{\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_s\}}$ 를 $\boldsymbol{W}$ 의 **기저(basis)**라 하고 $\boldsymbol{W}$ 의 기저의 벡터의 개수를 $\boldsymbol{W}$ 의 **차원(dimension)**으로 정의하며 $\boldsymbol{dim(W)}$ 로 쓴다.

*$\boldsymbol{R^n}$ 에 속하는 벡터 $\boldsymbol{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_s}$ 가 일차독립이기 위한 필요충분조건은 $\boldsymbol{(n \times s)}$ 행렬 $\boldsymbol{[\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \ \cdots\ \ \vec{v}_s]}$ 의 역행렬이 존재할 때이다.

(2013학년도 1차 시험(전공), #13)
실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $\mathbb{R}^5$에 속하는 벡터 $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$ 에 대하여
옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [1.5점]

<보기>

ㄱ. $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$이 일차독립이면 $\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_2}+\boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_2}+\boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_3}$ 도 일차독립이다.

ㄴ. 집합 $\{\boldsymbol{a}\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{v_2}+\boldsymbol{c}\boldsymbol{v_3} | \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}\}$는 $\mathbb{R}^5$ 의 부분공간이다.

ㄷ. 5차 정사각행렬 $\boldsymbol{A}$에 대하여 두 방정식 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{v_2}$가 모두 해를 가지면 방정식 $\boldsymbol{Ax}=2\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_2}$ 도 해를 가진다.

[풀이]

ㄱ. $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_2}+\boldsymbol{v_3})+\boldsymbol{b}(\boldsymbol{v_2}+\boldsymbol{v_3})+\boldsymbol{c}\boldsymbol{v_3}=\boldsymbol{0}$ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R})$이면

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{v_1}+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{v_2}+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{v_3}=\boldsymbol{0}$$

그런데, $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$ 이 일차독립이라는 조건에 의해

$$a = a + b = a + b + c = 0 \quad \rightarrow \quad a = b = c = 0$$

따라서, $v_1 + v_2 + v_3, v_2 + v_3, v_3$ 도 일차독립이다.

ㄴ. 주어진 집합을 V 로 두자. $x, y \in V$이면 $V = span\{v_1, v_2, v_3\}$이므로

$$x = av_1 + bv_2 + cv_3,\ y = a'v_1 + b'v_2 + c'v_3\ (a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R})$$

$s, t \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$sx + ty = s(av_1 + bv_2 + cv_3) + t(a'v_1 + b'v_2 + c'v_3)$$
$$= (sa + ta')v_1 + (sb + tb')v_2 + (sc + tc')v_3 \in V$$

따라서, V 는 $\mathbb{R}^5$ 의 부분공간이다.

ㄷ. $Ax_1 = v_1,\ Ax_2 = v_2$ 로 두자. 그러면,

$$Ax = 2v_1 + v_2 = 2Ax_1 + Ax_2 = A(2x_1 + x_2)$$

그런데, 서로 다른 두 방정식의 해가 존재한다는 가정으로부터
A의 역행렬이 존재하므로 $x = 2x_1 + x_2$ 이다.
그러므로, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

$\square$

미분기하학
(단원별 기출문제)

Practice makes perfect

2002학년도부터 2020학년도까지 8개 단원 34문항 출제

- 곡선(2)
- 곡률(3)
- 비틀림률(11)
- 접평면, 법선(3)
- 법곡률(2)
- 가우스곡률(8)
- 측지곡률(4)
- Gauss-Bonnet 정리(1)

미분기하학	2002	2003	2004
곡선			#11, 5점
곡률			
비틀림률	#12-1, 3점	#13, 5점	
접평면, 법선			
법곡률			
가우스곡률			
측지곡률			
Gauss-Bonnet 정리			
計	1	1	1

미분기하학	2005	2006	2007
곡선			
곡률	#17, 3점		#9, 4점
비틀림률			
접평면, 법선		#16, 5점	
법곡률			
가우스곡률			
측지곡률			
Gauss-Bonnet 정리			
計	1	1	1

미분기하학	2008	2009	2010
곡선			
곡률			
비틀림률		전공1차, #35	
접평면, 법선	#17, 4점		전공1차, #19
법곡률			
가우스곡률			
측지곡률			전공1차, #20
Gauss-Bonnet 정리		전공1차, #36	
計	1	2	2

미분기하학	2011	2012	2013
곡선	전공1차, #35		
곡률			
비틀림률		전공1차, #34	전공1차, #33
접평면, 법선			
법곡률			전공1차, #34
가우스곡률	전공1차, #36 전공2차, #4 (위상)	전공1차, #35 전공2차, #4 (위상)	전공2차, #3-2 (위상)
측지곡률			
Gauss-Bonnet 정리			
計	3	3	3

미분기하학	2014	2015	2016
곡선			
곡률			전공A, #6, 2점
비틀림률	전공A, #11, 2점	전공A, #7, 2점	
접평면, 법선			
법곡률			
가우스곡률		전공B, #3, 5점	
측지곡률	전공A, #12, 2점		전공B, #5, 4점
Gauss-Bonnet 정리			
計	2	2	2

미분기하학	2017	2018	2019
곡선			
곡률			
비틀림률	전공A, #8, 2점	전공A, #6, 2점	전공A, #6, 2점
접평면, 법선			
법곡률		전공B, #5, 4점	
가우스곡률			전공B, #5, 4점
측지곡률	전공B, #5, 4점		
Gauss-Bonnet 정리			
計	2	2	2

미분기하학	2020		
곡선			
곡률			
비틀림률	전공A, #3, 2점		
접평면, 법선			
법곡률			
가우스곡률	전공B, #8, 4점		
측지곡률			
Gauss-Bonnet 정리			
計	2		

곡선 $X = X(t)(a \le t \le b)$ 의 **호의 길이(arc length)** s 는

$$s = \int_a^b \|X'(t)\| dt$$

곡선 $X = X(t)$ 의 단위 접선 벡터 T 는

$$T = \frac{dX}{ds}$$

$\frac{ds}{dt} = \|X'(t)\|$ 이고 연쇄 법칙(chain rule)을 적용하면

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dX}{ds}\frac{ds}{dt} \quad \rightarrow \quad X'(t) = T\|X'(t)\|$$

정칙곡선 $X = X(t)$ 의 단위 접선 벡터 T 는

$$T = \frac{X'(t)}{\|X'(t)\|} \quad (\because \|X'(t)\| \neq 0)$$

(2004학년도, #11)
곡선 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = (\mathbf{3}\boldsymbol{t}, \mathbf{3}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}, \mathbf{2}\boldsymbol{t}^{\mathbf{3}})$ 위의 모든 점에서 단위접선벡터(unit tangent vector)와 평면 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = \mathbf{0}$이 이루는 각을 구하시오. [총 5점]

[풀이]

$\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{t}) = \left(\mathbf{3}, \mathbf{6}\boldsymbol{t}, \mathbf{6}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}\right)$, 주어진 평면의 법선 벡터는

$$(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$$

따라서, 구하고자 하는 각을 $\boldsymbol{\theta}$로 두면

$$\cos\boldsymbol{\theta} = \frac{\left(3,6t,6t^2\right)\cdot(1,0,1)}{\sqrt{9+36t^2+36t^4}\sqrt{2}} = \frac{3+6t^2}{3\sqrt{2}\sqrt{(1+2t^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

이므로

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{\pi}{4}$$

□

복소해석학

(단원별 기출문제)

Practice makes perfect

2002학년도부터 2020학년도까지 8개 단원 33문항 출제

- Cauchy-Riemann 방정식, 해석함수(5)
- 적분(1)
- 경로적분(2),
- Cauchy 의 적분공식(9),
- Liouville 의 정리(7)
- 유수(residue)(7)
- 유수(residue)의 응용(1)
- 선형분수변환(1)

복소해석학	2002	2003	2004
Cauchy-Riemann 방정식, 해석함수			
적분			
경로적분		#10, 5점	
Cauchy 의 적분공식			
Liouville 의 정리	#6, 5점	#11-2, 2점	#10, 5점
유수(residue)			
유수(residue)의 응용			
선형분수변환			
計	1	2	1

복소해석학	2005	2006	2007
Cauchy-Riemann 방정식, 해석함수	#15, 5점		
적분			
경로적분			
Cauchy 의 적분공식			#14, 4점
Liouville 의 정리		#15, 4점	
유수(residue)			
유수(residue)의 응용			
선형분수변환			
計	1	1	1

복소해석학	2008	2009	2010
Cauchy-Riemann 방정식, 해석함수			
적분			
경로적분			
Cauchy 의 적분공식		전공2차, #4 (해석)	전공 1차, #31 전공 1차, #35, 2.5점
Liouville 의 정리		전공1차, #29	
유수(residue)	#14, 4점	전공1차, #30	전공 1 차, #36
유수(residue)의 응용			
선형분수변환			
計	1	3	3

복소해석학	2011	2012	2013
Cauchy-Riemann 방정식, 해석함수	전공1차, #30 전공1차, #26		전공1차, #27, 1.5점
적분			
경로적분			전공2차, #4, 20점
Cauchy 의 적분공식		전공1차, #29	
Liouville 의 정리			
유수(residue)	전공1차, #29, 1.5점	전공1차, #28	전공1차, #28, 2.5점
유수(residue)의 응용			
선형분수변환			
計	3	2	3

복소해석학	2014	2015	2016
Cauchy-Riemann 방정식, 해석함수			
적분			
경로적분			
Cauchy 의 적분공식	전공B, 논술형 #2, (선형)		전공B, #7, 5점
Liouville 의 정리			
유수(residue)			
유수(residue)의 응용		전공A, 서술형 #3, 5점	
선형분수변환			
計	1	1	1

복소해석학	2017	2018	2019
Cauchy-Riemann 방정식, 해석함수	전공A, #6, 2점		
적분			전공A, #5, 2점
경로적분			
Cauchy 의 적분공식			전공B, #4, 4점
Liouville 의 정리		전공B, #4, 4점	
유수(residue)	전공A, #11, 4점		
유수(residue)의 응용			
선형분수변환		전공A, #5, 2점	
計	2	2	2

복소해석학	2020		
Cauchy-Riemann 방정식, 해석함수			
적분			
경로적분			
Cauchy 의 적분공식	전공A, #9, 4점		
Liouville 의 정리	전공B, #10, 4점		
유수(residue)			
유수(residue)의 응용			
선형분수변환			
計	2		

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 라 두자. 점 $z_0 = x_0 + iy_0$ 에서 $f'(z_0)$가
존재하기 위한 필요 충분 조건은 u , v의 일계 편도함수가 (x_0, y_0)에서
존재하고 **Cauchy-Riemann 방정식**이라고 하는 다음 식이 성립할 때이다.

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \quad , \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

특히, $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$ 가 성립한다.

복소 변수 함수 f 를 점 z_0 에서 **해석적(analytic)**이라고 하는 것은
f 가 z_0의 어떤 근방의 모든 점에서 미분가능할 때이다.

유한 평면의 각 점에서 해석적인 함수를 **전해석 함수(entire function)**
라고 한다.

다항 함수는 모든 점에서 미분가능하므로 모든 다항 함수는 전해석 함수이다.

YSJ

(2005학년도, #15)

복소평면 C 안의 영역(domain) D에서 정의된 함수 $f: D \to C$가 해석적(analytic)이고, 모든 $z \in D$에 대해 $Imf(z) = 2Ref(z)$가 성립한다. $f(z)$는 D에서 상수임을 보이시오. [5점]

[풀이]

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ $(z = x + iy \in D,\ x, y \in \mathbb{R})$ 로 두자. 그러면,

$Imf(z) = 2Ref(z)$ 라는 조건에 의해

$$v = 2u$$

f가 D 에서 해석적이라는 조건에 의해

$$u_x = v_y,\ u_y = -v_x \ (\because \text{Cauchy-Riemann 방정식})$$

$v_x = 2u_x = 2v_y,\ v_y = 2u_y = 2(-v_x)$ 이므로

$$v_x = 0\ ,\ v_y = 0$$

따라서, $v(x, y) = c$ (c 는 상수) 로 두면 $u(x, y) = \frac{c}{2}$ 이므로

$$f(z) = \frac{c}{2} + ic (c \text{ 는 상수})$$

□

정수론
(단원별 기출문제)

Practice makes perfect

2002학년도부터 2020학년도까지 5개 단원 23문항 출제

- 나눗셈 정리(2)
- 합동(3)
- Euler 의 정리(5)
- 원시근, 지표(index)(8)
- 이차상호법칙(5)

정수론	2002	2003	2004
나눗셈 정리			
합동		#6, 5점	
Euler 의 정리			
원시근, 지표(index)			
이차상호법칙			#6, 5점
計	0	1	1

정수론	2005	2006	2007
나눗셈 정리			
합동		#11, 4점	#11, 4점
Euler 의 정리	#10, 2점		
원시근, 지표(index)			
이차상호법칙			
計	1	1	1

정수론	2008	2009	2010
나눗셈 정리	#7, 4점	전공1차, #17	
합동			
Euler 의 정리			
원시근, 지표(index)		전공1차, #18	전공1차, #22
이차상호법칙			전공1차, #21
計	1	2	2

정수론	2011	2012	2013
나눗셈 정리			
합동			
Euler 의 정리	전공1차, #17		
원시근, 지표(index)		전공1차, #16 전공1차, #17	전공1차, #15
이차상호법칙	전공1차, #18		전공1차, #16
計	2	2	2

정수론	2014	2015	2016
나눗셈 정리			
합동			
Euler 의 정리	전공A, #5, 2점		
원시근, 지표(index)		전공A, 서술형 #4, 5점	전공A, #13, 4점
이차상호법칙			
計	1	1	1

정수론	2017	2018	2019
나눗셈 정리			
합동			
Euler 의 정리			전공B, #3, 4점
원시근, 지표(index)		전공A, #13, 4점	
이차상호법칙	전공A, #13, 4점		
計	1	1	1

정수론	2020		
나눗셈 정리			
합동			
Euler 의 정리	전공A, #7, 4점		
원시근, 지표(index)			
이차상호법칙			
計	1		

정렬 원리(Well-Ordering Principle)
음이 아닌 정수들의 모든 공집합이 아닌 집합 S 는 최소 원소를 갖는다.

***나눗셈 정리(Division Algorithm)**
주어진 정수 $a, b\ (b > 0)$ 에 대하여

$$a = bq + r\ ,\ 0 \leq r < b$$

를 만족시키는 유일한 정수 q, r 이 존재한다.

a 를 b로 나누는 연산에서 q, r 를 각각
몫(quotient), **나머지(remainder)**라고 한다.

왜냐하면,

다음 집합을 고려하자.

$$S = \{a - xb | a - xb \geq 0, x \in \mathbb{Z}\}$$

$b \geq 1$ 이므로, $|a|b \geq |a|$ 이다.

$$a - (-|a|b) = a + |a|b \geq a + |a| \geq 0 \quad \rightarrow \quad a - (-|a|b) \in S$$

이므로 S 는 공집합이 아닌 음이 아닌 정수들의 집합이다.

정렬 원리에 의해 S는 최소 원소 r를 갖는다. S 의 정의로부터

$$r = a - qb \ , \ q \in \mathbb{Z}$$

$r \geq b$ 이면,

$$a - (q+1)b = (a - qb) - b = r - b \geq 0 \quad \rightarrow \quad a - (q+1)b \in S$$

그런데, $a - (q+1)b = r - b < r \ (\because b > 0)$ 이므로 이것은 r이

S의 최소 원소라는 가정에 모순이다. 따라서, $0 \leq r < b$ 이다.

q , r 의 유일성을 보이기 위해 다음과 같이 가정하자.

$$a = bq + r = bq' + r' \ , \ 0 \leq r, r' < b$$

그러면, $r' - r = b(q - q')$ 이므로

$$|r' - r| = b|q - q'|$$

$-b < r' - r < b$ 이므로

$$0 \le b|q - q'| < b \quad \rightarrow \quad 0 \le |q - q'| < 1 \ (\because b > 0)$$

그런데, $q - q' \in \mathbb{Z}$ 이므로

$$|q - q'| = 0 \quad \rightarrow \quad q = q'$$

따라서,

$$r' = r \ (\because \ |r' - r| = b|q - q'|)$$

<보기>

(1) 정수의 제곱은 $\mathbf{4}$로 나누었을 때의 나머지가 $\mathbf{0}$ 또는 $\mathbf{1}$ 임을 보이시오.

(2) 모든 홀수의 제곱은 $\boldsymbol{8k+1}$ 형태임을 보이시오.

(3) 모든 정수 $\boldsymbol{a} \geq \mathbf{1}$ 에 대하여 $\frac{\boldsymbol{a(a^2+2)}}{\mathbf{3}}$ 가 정수임을 보이시오.

[풀이]

(1) 나눗셈 정리에 의해 모든 정수는 $\boldsymbol{2q}$ 또는 $\boldsymbol{2q+1}$ 형태로 표현된다.

그러면,

$$(2q)^2 = 4q^2 = 4k \text{ 또는 } (2q+1)^2 = 4q^2+4q+1 = 4\left(q^2+q\right)+1 = 4k+1$$

따라서, 정수의 제곱은 $\mathbf{4}$로 나누었을 때의 나머지가 $\mathbf{0}$ 또는 $\mathbf{1}$ 이다.

(2) 나눗셈 정리에 의해 모든 정수는 $\boldsymbol{4q}$, $\boldsymbol{4q+1}$, $\boldsymbol{4q+2}$,

또는 $\boldsymbol{4q+3}$ 형태로 표현된다. 이 중 $\boldsymbol{4q+1}$, $\boldsymbol{4q+3}$ 형태만 홀수이다.

따라서,

$$(4q+1)^2 = 16q^2+8q+1 = 8\left(2q^2+q\right)+1 = 8k+1,$$

$$(4q+3)^2 = 16q^2+24q+9 = 8\left(2q^2+3q+1\right)+1 = 8k+1$$

(3) 나눗셈 정리에 의해 모든 정수 $a \geq 1$ 는 $3q$, $3q+1$, 또는 $3q+2$ 형태로 표현된다.

$$\frac{a(a^2+2)}{3} = \frac{3q(9q^2+2)}{3} = q(9q^2+2) \in \mathbb{Z}\ ,$$

$$\frac{a\,(a^2+2)}{3} = \frac{(3q+1)(9q^2+6q+3)}{3} = (3q+1)(3q^2+2q+1) \in \mathbb{Z}\ ,$$

$$\frac{a\,(a^2+2)}{3} = \frac{(3q+2)(9q^2+12q+6)}{3} = (3q+2)(3q^2+4q+2) \in \mathbb{Z}$$

$\square$

*$a = bq + r$ 이면

$$gcd(a, b) = gcd(b, r)$$

왜냐하면,

$gcd(a, b) = d$ 로 두자. 그러면,

$$d \mid a,\ d \mid b \quad \rightarrow \quad d \mid (a - bq),\ d \mid r$$

$c \mid b$ 이고 $c \mid r$ 이면 $c \mid (bq + r)$ 이므로 $c \mid a$ 이다. 그런데,

$$gcd(a, b) = d \quad \rightarrow \quad c \leq d$$

위 결과를 이용하면 **Euclidean 알고리즘(algorithm)**이라고 하는 다음 방법을 얻는다.

<보기>

Euclidean 알고리즘을 이용한 $gcd(12378, 3054)$를 구하는 과정은?

$$12378 = 3054 \times 4 + 162$$
$$3054 = 162 \times 18 + 138$$
$$162 = 138 \times 1 + 24$$
$$138 = 24 \times 5 + 18$$
$$24 = 18 \times 1 + 6$$
$$18 = 6 \times 3 + 0$$

그러면, $gcd(12378, 3054) = 6$

6 을 $12378, 3054$ 의 선형 조합으로 나타내기 위해

위 과정의 역순으로 나머지를 제거하면

$$\begin{aligned}6 &= 24 - 18 = 24 - (138 - 24 \times 5) = 24 \times 6 - 138 = (162 - 138)6 - 138\\ &= 162 \times 6 - 138 \times 7 = 162 \times 6 - (3054 - 162 \times 18)7\\ &= 162 \times 132 - 3054 \times 7 = (12378 - 3054 \times 4)132 - 3054 \times 7\\ &= 12378 \times 132 - 3054 \times 535 \quad \rightarrow\end{aligned}$$

$$6 = gcd(12378, 3054) = 12378 \times 132 + 3054 \times (-535)$$

*둘 중 하나는 영이 아닌 주어진 정수 a, b 에 대하여
다음을 만족시키는 정수 x, y 가 존재한다.

$$gcd(a,b) = ax + by$$

예를 들어, $6 = gcd(12378, 3054) = 12378 \times 132 + 3054 \times (-535)$

***Euclid 의 보조정리**

$a \mid bc$ 이고 $gcd(a,b) = 1$ 이면

$$a \mid c$$

왜냐하면,

$bc = ar \ (r \in \mathbb{Z})$, $1 = ax + by \ (x, y \in \mathbb{Z})$ 이므로
$c = c \times 1 = c(ax + by) = acx + bcy = acx + ary = a(cx + ry) \quad \rightarrow$

$$a \mid c$$

하나 이상의 미지수를 가지는 임의의 방정식의 정수해를 구하는 문제를 **Diophantine 방정식**이라고 한다.

*선형 Diophantine 방정식 $\boldsymbol{ax+by=c}$ 가 해를 갖기 위한 필요 충분 조건은 $\boldsymbol{d \mid c}$ 일 때이다.

여기서, $\boldsymbol{d=gcd(a,b)}$

*$\boldsymbol{x_0}$, $\boldsymbol{y_0}$가 이 방정식의 특수해이면 다른 모든 해들은 다음과 같이 주어진다.

$$\boldsymbol{x=x_0+\left(\frac{b}{d}\right)t,\ y=y_0-\left(\frac{a}{d}\right)t\ (t\in\mathbb{Z})}$$

예를 들어, 선형 Diophantine 방정식 $\boldsymbol{172x+20y=1000}$ 의 해는?

$$172 = 20 \times 8 + 12$$
$$20 = 12 \times 1 + 8$$
$$12 = 8 \times 1 + 4$$
$$8 = 4 \times 2 + 0$$

그러면, $gcd(172, 20) = 4$ 이다.

$4 \mid 1000$ 이고 4 를 $172, 20$ 의 선형 조합으로 나타내면

$$4 = 12 - 8 = 12 - (20 - 12) = 12 \times 2 - 20 = (172 - 20 \times 8)2 - 20$$
$$= 172 \times 2 - 20 \times 17 \quad \rightarrow$$
$$4 = 172 \times 2 + 20 \times (-17)$$

따라서,

$$1000 = 250 \times 4 = 250[172 \times 2 + 20 \times (-17)]$$
$$= 172 \times 500 + 20 \times (-4250)$$

이므로 방정식의 해는 $x_0 = 500,\ y_0 = -4250$ 이다.

또 다른 해를 x, y 로 두면

$172(500) + 20(-4250) = 1000 = 172x + 20y \quad \rightarrow$

$$172(500 - x) = 20(y + 4250)\ ,\ 43(500 - x) = 5(y + 4250)$$

$gcd(43, 5) = 1$ 이므로

$5 \mid (500 - x),\ 43 \mid (y + 4250) \quad \rightarrow \quad 500 - x = 5t,\ y + 4250 = 43t(t \in \mathbb{Z})$

그러면, 또 다른 해 x, y 는

$$x = 500 + 5(-t) = 500 + \frac{20}{4}(-t),\ y = -4250 + 43t = -4250 - \frac{172}{4}(-t)$$

(2008학년도, #7)

정수 x, y, z에 관한 다음 방정식의 일반해를 구하시오.

$$3x + 4y + 5z = 2$$

[풀이]

$3x + 4y = a$로 두자. $gcd(3, 4) = 1$이므로 이 방정식의 해가 존재한다.

$1 = 3(-1) + 4(1)$이므로

$$a = a(1) = a[3(-1) + 4(1)] = 3(-a) + 4(a)$$

그러면, 이 방정식의 일반해는 $s \in \mathbb{Z}$에 대하여

$$x = -a + \frac{4}{gcd(3,4)} s = -a + 4s\ ,\ y = a - \frac{3}{gcd(3,4)} s = a - 3s$$

주어진 방정식 $3x + 4y + 5z = 2$ 는 $a + 5z = 2$ 이고

$gcd(1, 5) = 1$ 이므로 이 방정식의 해 또한 존재한다.

$\boldsymbol{1 = 1 + 5(0)}$ 이므로

$$\boldsymbol{2 = 2(1) = 2[1 + 5(0)] = 1(2) + 5(0)}$$

그러면, 이 방정식의 일반해는 $\boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}$ 에 대하여

$$\boldsymbol{a = 2 + \frac{5}{gcd(1,5)}t = 2 + 5t\ ,\ z = 0 - \frac{1}{gcd(1,5)}t = -t}$$

따라서, 구하고자 하는 일반해는 $\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}$ 에 대하여

$$\boldsymbol{x = -2 + 4s - 5t,\ y = 2 - 3s + 5t,\ z = -t}$$

□

현대대수학
(단원별 기출문제)

<u>Practice makes perfect</u>

2002학년도부터 2020학년도까지 9개 단원 54문항 출제

- 부분군, 순환군(2)
- 치환군, 직접곱(7)
- 정규부분군, 잉여군(9)
- 환, 체(2)
- 아이디얼(Ideal), 잉여환(9)
- 극대아이디얼, 소아이디얼(6)
- 대수적확대체(3)
- 유한체(6)
- Galois 군(10)

현대대수학	2002	2003	2004
부분군, 순환군	#5, 5점		#7, 5점
치환군, 직접곱			
정규부분군, 잉여군			
환, 체			
아이디얼(Ideal), 잉여환			
극대아이디얼, 소아이디얼		#8, 5점	
대수적확대체	#10, 5점		
유한체			
Galois 군			
計	2	1	1

현대대수학	2005	2006	2007
부분군, 순환군			
치환군, 직접곱			#12, 4점
정규부분군, 잉여군		#10, 4점	
환, 체			
아이디얼(Ideal), 잉여환	#21, 2점/#22, 3점	#9, 4점	
극대아이디얼, 소아이디얼			
대수적확대체			
유한체	#19, 4점		#18, 5점
Galois 군			
計	2	2	2

현대대수학	2008	2009	2010
부분군, 순환군			
치환군, 직접곱		전공1차, #19	
정규부분군, 잉여군			전공1차, #25, 1.5점 전공1차, #26, 2.5점
환, 체			
아이디얼(Ideal), 잉여환	#8, 5점	전공1차, #20	
극대아이디얼, 소아이디얼			전공1차, #27
대수적확대체	#9, 4점	전공1차, #21	
유한체			전공1차, #28
Galois 군		전공1차, #22	
計	2	4	4

현대대수학	2011	2012	2013
부분군, 순환군			
치환군, 직접곱		전공1차, #18, 1.5점 전공1차, #19, 2.5점	
정규부분군, 잉여군	전공1차, #19, 1.5점		전공1차, #17
환, 체			전공1차, #18
아이디얼(Ideal), 잉여환	전공1차, #20		전공1차, #19
극대아이디얼, 소아이디얼	전공1차, #21, 2.5점	전공1차, #20	전공2차, #2, 20점
대수적확대체			
유한체		전공1차, #21	전공1차, #20
Galois 군	전공1차, #22 전공2차, #2, 20점		
計	5	4	5

현대대수학	2014	2015	2016
부분군, 순환군			
치환군, 직접곱	전공A, 기입형 #6, 2점		
정규부분군, 잉여군		전공A, #8, 2점	전공A, #2, 2점
환, 체	전공A, 서술형 #3, 4점		
아이디얼(Ideal), 잉여환			
극대아이디얼, 소아이디얼			
대수적확대체			
유한체			전공A, #14, 4점
Galois 군	전공B, 서술형 #2, 4점	전공B, 논술형 #1, 10점	전공B, #6, 5점
計	3	2	3

현대대수학	2017	2018	2019
부분군, 순환군			
치환군, 직접곱		전공A, #2, 2점	
정규부분군, 잉여군	전공B, #2, 4점		전공A, #14, 4점
환, 체			
아이디얼(Ideal), 잉여환	전공A, #3, 2점		전공A, #2, 2점
극대아이디얼, 소아이디얼		전공A, #14, 4점	
대수적확대체			
유한체			
Galois 군	전공B, #6, 5점	전공B, #6, 5점	전공B, #6, 5점
計	3	3	3

현대대수학	2020		
부분군, 순환군			
치환군, 직접곱	전공A, #4, 2점		
정규부분군, 잉여군			
환, 체			
아이디얼(Ideal), 잉여환	전공A, #10, 4점		
극대아이디얼, 소아이디얼			
대수적확대체			
유한체			
Galois 군	전공B, #11, 4점		
計	3		

군 G의 부분집합 H가 G의 이항 연산에 관하여 닫혀 있고 G로부터 유도된 연산을 가지는 H가 군일 때, H를 G의 **부분군(subgroup)**이라고 한다.

$H \leq G$ 또는 $G \geq H$ 는 H 가 G 의 부분군임을 나타낸다.

*군 G 의 부분집합 H 가 G 의 부분군이기 위한 필요 충분 조건은

(1) H 가 G 의 이항 연산에 관하여 닫혀 있다.

(2) G 의 항등원 e 가 $e \in H$ 이다.

(3) 모든 $a \in H$ 에 대하여 $a^{-1} \in H$ 이다.

G 는 군, $a \in G$ 라 하자. 그러면, G 의 부분군 $H = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$ 를 a 에 의해 생성된 G의 **순환 부분군(cyclic subgroup)**이라 하고 $< a >$로 표기한다.

$G =< a >$ 일 때 a 는 G 를 **생성한다(generate)**고 하고 a 를 G 의 **생성원(generator)**이라고 한다.

군 G 가 순환적(cyclic)이기 위한 필요 충분 조건은 $a \in G$ 에 대하여 $G =< a >$ 일 때이다.

*모든 순환군은 abelian 군이다. 왜냐하면,
$G = < a > = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$ 로 두자.
$g_1, g_2 \in G$ 이면, 적당한 $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$에 대하여

$$g_1 = a^{n_1} \ , \ g_2 = a^{n_2}$$

그러면,

$$\begin{aligned} g_1 g_2 &= a^{n_1} a^{n_2} = a^{n_1+n_2} = a^{n_2+n_1} \ (\because n_1 + n_2 = n_2 + n_1) \\ &= a^{n_2} a^{n_1} = g_2 g_1 \end{aligned}$$

이기 때문이다.

*순환군의 부분군은 순환적(cyclic)이다. 왜냐하면,
$G = < a > = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$, $H \leq G$ 라고 두자.
$H = \{e\}$이면, $H = < e >$ 이므로 H 는 순환적이다.

$H \neq \{e\}$이면, $H \leq G = < a >$이므로 적당한 $n \in \mathbb{Z}$에 대하여 $a^n \in H$이다.

최소의 양의 정수 m에 대하여 $a^m \in H$이면 $\mathbb{Z}$에 대한 나눗셈 알고리즘에 의해

$$n = mq + r \ (0 \leq r < m)$$

을 만족시키는 유일한 $q, r \in \mathbb{Z}$ 이 존재한다.

그러면,

$$a^r = a^{n-mq} = a^n (a^m)^{-q}$$

$a^n \in H$, $(a^m)^{-q} \in H$ 이므로 $a^r \in H$ 이다.

그런데, m 이 $a^m \in H$ 인 최소의 양의 정수라는 가정에 의해 $r = 0$ 이므로

$$a^n = a^{mq} = (a^m)^q \qquad \rightarrow \qquad H = < a^m > = \{(a^m)^q | q \in \mathbb{Z}\}$$

이기 때문이다.

*$G = < a >$ 라고 하자.

(i) G 의 위수(order)가 무한이면

$$G \simeq < \mathbb{Z}, + >$$

(ii) $|G| = n$ 이면

$$G \simeq < \mathbb{Z}_n, +_n >$$

왜냐하면,

(i) $\phi(a^i) = i$로 주어진 사상 $\phi: G \to \mathbb{Z}$는 잘 정의된 일대일 위로의 사상이다.

$k < h$ 인 $k, h \in \mathbb{Z}$ 에 대하여 $a^h = a^k$ 이면

$$a^h a^{-k} = a^{h-k} = e$$

이것은 모든 $m \in \mathbb{Z}^+$ 에 대하여 $a^m \neq e$ (e는 G 의 항등원)라는 가정에 의해 불가능하기 때문이다.

또한,

$$\phi(a^i a^j) = \phi(a^{i+j}) = i + j = \phi(a^i) + \phi(a^j)$$

이므로 ϕ 는 준동형사상 성질을 만족한다. 따라서, ϕ 는 동형사상이다.

(ii) $\phi(a^i) = i$로 주어진 사상 $\phi: G \to \mathbb{Z}_n$ 은

잘 정의된 일대일 위로의 사상이다.

$0 < k < h < n$ 인 $k, h \in \mathbb{Z}$ 에 대하여 $a^h = a^k$ 이면

$$a^h a^{-k} = a^{h-k} = e$$

이것은 $n \in \mathbb{Z}^+$ 에 대하여 $a^n = e$ (e는 G 의 항등원)라는

가정에 의해 불가능하기 때문이다.

또한,

$$\phi(a^i a^j) = \phi(a^{i+j}) = i +_n j = \phi(a^i) +_n \phi(a^j)$$

이므로 ϕ 는 준동형사상 성질을 만족한다. 따라서, ϕ 는 동형사상이다.

*$|G| = |< a >| = n$ 이라고 하자. 그러면,

$$|< a^s >| = \frac{n}{gcd(s,n)}$$

왜냐하면,

$|< a^s >| = m$ 으로 두자. 그러면,

$$(a^s)^m = a^{sm} = e$$

$a^n = e$ 이므로 $n \mid (ms)$ 이고 $gcd(s,n) = us + vn$ $(u, v \in \mathbb{Z})$ 이므로

$$1 = u\frac{s}{gcd(s,n)} + v\frac{n}{gcd(s,n)} \quad \left(\frac{s}{gcd(s,n)}, \frac{n}{gcd(s,n)} \in \mathbb{Z}\right)$$

$\frac{s}{gcd(s,n)}$ 와 $\frac{n}{gcd(s,n)}$ 은 서로 소이므로

$$\frac{ms}{n} = \frac{m\frac{s}{gcd(s,n)}}{\frac{n}{gcd(s,n)}} \in \mathbb{Z} \quad \rightarrow \quad \frac{n}{gcd(s,n)} \Big| m$$

그런데, $(a^s)^{\frac{n}{gcd(s,n)}} = (a^n)^{\frac{s}{gcd(s,n)}} = e^{\frac{s}{gcd(s,n)}} = e$ 이므로 $m \Big| \frac{n}{gcd(s,n)}$ 이다.

따라서, $m = \frac{n}{gcd(s,n)}$ 이기 때문이다.

<보기>

$\mathbb{Z}_{18}$ 의 모든 부분군은?

$\mathbb{Z}_{18} = <\mathbf{1}> = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots, \mathbf{17}\}$ 의 생성원은 $\mathbf{18}$ 과 서로 소인 수

$$\mathbf{1}, \mathbf{5}, \mathbf{7}, \mathbf{11}, \mathbf{13}, \mathbf{17}$$

왜냐하면, $|<\boldsymbol{r}>| = |<\boldsymbol{r}(\mathbf{1})>| = \frac{\mathbf{18}}{\boldsymbol{gcd}(\boldsymbol{r}, \mathbf{18})} = \mathbf{18}$ 이면

$\boldsymbol{gcd}(\boldsymbol{r}, \mathbf{18}) = \mathbf{1}$ 이기 때문이다.

$|<\mathbf{2}>| = \frac{\mathbf{18}}{\boldsymbol{gcd}(\mathbf{2}, \mathbf{18})} = \mathbf{9} \rightarrow$

$<\mathbf{2}> = \{\mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{6}, \mathbf{8}, \mathbf{10}, \mathbf{12}, \mathbf{14}, \mathbf{16}\} =<\mathbf{4}> = <\mathbf{8}> = <\mathbf{10}> =<\mathbf{14}> =<\mathbf{16}>$

($\mathbf{9}$ 와 서로 소인 수 $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{7}, \mathbf{8}$)

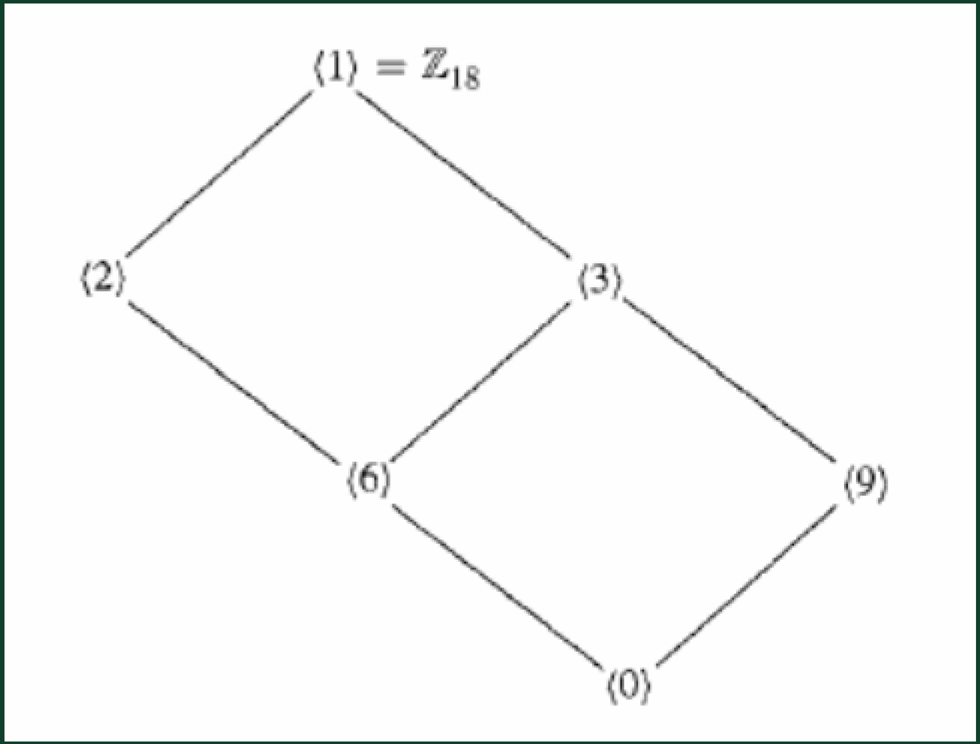
$|<\mathbf{3}>| = \frac{\mathbf{18}}{\boldsymbol{gcd}(\mathbf{3}, \mathbf{18})} = \mathbf{6} \rightarrow <\mathbf{3}> = \{\mathbf{0}, \mathbf{3}, \mathbf{6}, \mathbf{9}, \mathbf{12}, \mathbf{15}\} = <\mathbf{15}>$

($\mathbf{6}$ 과 서로 소인 수 $\mathbf{1}, \mathbf{5}$)

$|<\mathbf{6}>| = \frac{\mathbf{18}}{\boldsymbol{gcd}(\mathbf{6}, \mathbf{18})} = \mathbf{3} \rightarrow <\mathbf{6}> = \{\mathbf{0}, \mathbf{6}, \mathbf{12}\} =<\mathbf{12}>$($\mathbf{3}$ 과 서로 소인 수 $\mathbf{1}, \mathbf{2}$)

$|<\mathbf{9}>| = \frac{\mathbf{18}}{\boldsymbol{gcd}(\mathbf{9}, \mathbf{18})} = \mathbf{2} \rightarrow <\mathbf{9}> = \{\mathbf{0}, \mathbf{9}\}$($\mathbf{2}$ 와 서로 소인 수 $\mathbf{1}$)

따라서, $\mathbb{Z}_{18}$ 의 모든 부분군에 대한 부분군 도표(diagram)는



(2002학년도 , #5)

$G = \mathbb{Z}_{11} - \{0\}$는 곱셈에 대하여 순환군(cyclic group)이 된다.
이 사실을 이용하여 단위원시 10-제곱근(법 11에 관한 원시근, primitive 10^{th}-root of unity)을 모두 구하시오. (5점)

[풀이]

법 11 에 대하여

$$2^5 \equiv 32 \equiv -1$$

그러면, 2는 단위원시 10-제곱근 이므로 또 다른 단위원시 10-제곱근은

$$2^r \ (gcd(r, 10) = 1)$$

따라서, $r = 1, 3, 7, 9$ 이므로 법 11 에 대하여

$$2^1 \equiv 2,\ 2^3 \equiv 8,\ 2^7 \equiv (2^5)(2^2) \equiv -4 \equiv 7,\ 2^9 \equiv (2^7)(2^2) \equiv 28 \equiv 6$$

그러므로, 단위원시 10-제곱근은 $2, 6, 7, 8$ 이다.

□

위상수학

(단원별 기출문제)

Practice makes perfect

2002학년도부터 2020학년도까지 8개 단원 46문항 출제

- 집합, 함수(5)

- 극한점, 폐포, 내부, 외부, 경계(4)

- 기저(6)

- 연속함수(4)

- 콤팩트공간(10)

- 연결공간(7)

- 적공간(5)

- 상공간(4)

*거리(1)

위상수학	2002	2003	2004
집합, 함수			
극한점, 폐포, 내부, 외부, 경계			
기저			#12, 5점
연속함수	#11, 5점		
콤팩트공간		#14, 5점	
연결공간			
적공간			
상공간			
計	1	1	1

위상수학	2005	2006	2007
집합, 함수			
극한점, 폐포, 내부, 외부, 경계			
기저			
연속함수			#15, 4점
콤팩트공간		#18, 4점	
연결공간	#18, 2점		
적공간			#16, 4점
상공간	#20, 4점	#17, 4점	
計	2	2	2

위상수학	2008	2009	2010
집합, 함수		전공1차, #37, 1.5점	전공1차, #15, 1.5점
극한점, 폐포, 내부, 외부, 경계	#15, 4점 #16, 4점	전공1차, #38	
기저			
연속함수			전공1차, #18, 2.5점
콤팩트공간		전공1차, #39, 2.5점	전공1차, #16
연결공간		전공1차, #40 전공2차, #2, 20점	
적공간			
상공간			전공1차, #17
計	2	5	4

위상수학	2011	2012	2013
집합, 함수	전공1차, #31, 1.5점	전공1차, #30, 1.5점	전공1차, #29, 1.5점
극한점, 폐포, 내부, 외부, 경계		전공1차, #31	
기저	전공1차, #32	전공1차, #32, 2.5점	전공1차, #30
연속함수			
콤팩트공간	전공1차, #34, 2.5점	전공1차, #33 전공2차, #4 (미기)	
연결공간	전공2차, #4 (미기)		전공1차, #32, 2.5점
적공간	전공1차, #33		전공1차, #31
상공간			전공2차, #3-2 (미기)
計	5	5	5

위상수학	2014	2015	2016
집합, 함수			
극한점, 폐포, 내부, 외부, 경계			
기저		전공A, #9, 2점	
연속함수	전공A, #14, 2점		
콤팩트공간	전공B, 서술형 #3, 3점		
연결공간		전공A, #10, 2점	
적공간	전공A, 서술형 #2, 3점		전공A, #12, 4점
상공간			
計	3	2	1

위상수학	2017	2018	2019
집합, 함수			
극한점, 폐포, 내부, 외부, 경계			
기저		전공A, #12, 4점	
연속함수			
콤팩트공간	전공A, #12, 4점		전공A, #12, 4점
연결공간			
적공간			
상공간			
計	1	1	1

위상수학	2020		
집합, 함수			
극한점, 폐포, 내부, 외부, 경계			
기저			
연속함수			
콤팩트공간			
연결공간	전공A, #11, 4점		
적공간			
상공간			
計	2		

거리
(전공B, #2, 2점)

집합족(family of set) $\mathcal{F}$에 속하는 집합의 합집합(union)과

공통집합(intersection)을 각각 다음과 같이 표기한다

$\cup\{A|A\in\mathcal{F}\}=\{x|$어떤 $A\in\mathcal{F}$에 대하여 $x\in A\}$,

$\cap\{A|A\in\mathcal{F}\}=\{x|$모든 $A\in\mathcal{F}$에 대하여 $x\in A\}$

$\mathcal{F}=\{A_i|i\in I\}$에 대하여 $\mathcal{F}$ 에 속하는 집합의 합집합과

공통집합을 각각 다음과 같이 표기한다.

$$\cup_{i\in I}A_i\ ,\ \cap_{i\in I}A_i$$

***분배법칙**

$$B\cup(\cap_i A_i)=\cap_i(B\cup A_i)\ ,\ \ B\cap(\cup_i A_i)=\cup_i(B\cap A_i)$$

***DeMorgan 의 법칙**

$$(\cup_i A_i)^c=\cap_i {A_i}^c\ ,\ \ (\cap_i A_i)^c=\cup_i {A_i}^c$$

집합 A 의 **관계(relation)** R 는 $A \times A$ 의 부분집합을 말한다.

집합 A 의 관계 R 에 대하여 다음과 같은 표기

$$_aR_b$$

는 $(a, b) \in R \subset A \times A$ 를 의미한다.

집합 A 의 관계 R 이 **동치관계(equivalence relation)**라고 하는 것은 다음 공리(axiom)를 만족할 때이다.

[반사적(reflexive)] 모든 $a \in A$ 에 대하여

$$_aR_a$$

[대칭적(symmetric)] $_aR_b$ 이면

$$_bR_a$$

[추이적(transitive)] $_aR_b$ 이고 $_bR_c$ 이면

$$_aR_c$$

집합 A 의 동치관계 R 에 대하여 $a \in A$ 의 **동치류 (equivalence class)**란 다음과 같은 A 의 부분집합이다.

$$\{b \in A|{}_bR_a\}$$

집합 A의 동치관계 R에 대하여 $a \in A$의 동치류 집합을 $[a]$로 표기한다.

$$[a] = \{b \in A|{}_bR_a\}$$

집합 A 의 동치관계 R 에 대하여 A 의 동치류의 모임을 **상집합 (quotient set)**이라 하고 다음과 같이 표기한다.

$$A/R = \{[a]|a \in A\}$$

*$\cup_{a \in A}[a] = A$

*$[a] = [b] \quad \Leftrightarrow \quad {}_aR_b$

*$[a] \neq [b]$ 이면 $[a] \cap [b] = \emptyset$

*$f: X \to Y,\ A, B \subset X,\ C \subset Y$ 에 대하여

(1) $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B],\ f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B],\ f[A - B] \supset f[A] - f[B]$

(2) $A \subset f^{-1}[f[A]],\ \ f[f^{-1}[C]] \subset C$

집합 X를 **가부번(denumerable)** 집합이라 하고 기수 $\aleph_0$ 를 갖는다고 하는 것은 X 가 양의 정수 집합 $\mathbb{N}$과 동치일 때이다.

집합 X 를 **가산(countable)** 집합이라고 하는 것은 X 가 유한집합 또는 가부번집합일 때이다.

*$\{A_i | i \in I\}$가 가부번 집합의 서로소인 가부번 집합족이면 $\bigcup_{i \in I} A_i$ 또한 가부번이다.

*$\{A_i | i \in I\}$가 가산 집합족이면 $\bigcup_{i \in I} A_i$ 또한 가산이다.

(2009학년도 1차 시험(전공), #37)

두 집합 $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ 와 $A=\{2,4,6\}$ 에 대하여

$$R=\{(a,b)|a,b\in A\}\cup\{(x,x)|x\in X\}$$

라 하자. 임의의 $x\in X$ 에 대하여 $[x]=\{y\in X|(x,y)\in R\}$ 라 할 때,
집합 $X/R=\{[x]|x\in X\}$ 의 원소의 개수는? [1.5점]

[풀이]

$[1]=\{y\in X|(1,y)\in R\}=\{1\}$, $[3]=\{3\}$, $[5]=\{5\}$, $[7]=\{7\}$, $[8]=\{8\}$

$[2]=\{y\in X|(2,y)\in R\}=\{2,4,6\}=[4]=[6]$

따라서, $X/R=\{[1],[2],[3],[5],[7],[8]\}$ 이므로 X/R 의

원소의 개수는 6 개이다.

□

이산수학
(단원별 기출문제)

Practice makes perfect

2002학년도부터 2020학년도까지 6개 단원 25문항 출제

- 인접행렬, 근접행렬(5)
- 채색수(chromatic number)(2)
- 평면그래프(3)
- 이항정리, 조합(5)
- 점화식(3)
- 생성함수(7)

이산수학	2002	2003	2004
인접행렬, 근접행렬		#5, 5점	
채색수(chromatic number)			
평면그래프			
이항정리, 조합	#14, 5점		#13, 5점
점화식			
생성함수			
計	1	1	1

이산수학	2005	2006	2007
인접행렬, 근접행렬			#10, 4점
채색수(chromatic number)	#8, 5점		
평면그래프			
이항정리, 조합		#12, 4점	
점화식			
생성함수			
計	1	1	1

이산수학	2008	2009	2010
인접행렬, 근접행렬			
채색수(chromatic number)			
평면그래프		전공1차, #34	전공1차, #38
이항정리, 조합		전공1차, #33	
점화식	#18, 4점		
생성함수			전공1차, #37
計	1	2	2

이산수학	2011	2012	2013
인접행렬, 근접행렬	전공1차, #40		전공1차, #40
채색수(chromatic number)		전공1차, #40	
평면그래프			
이항정리, 조합			
점화식			전공1차, #38
생성함수	전공1차, #39	전공1차, #39	전공1차, #39
計	2	2	3

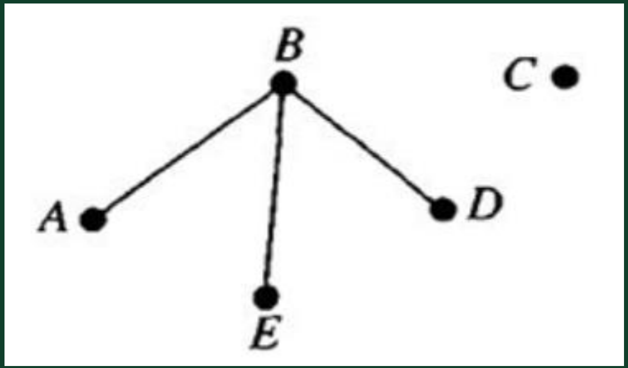
이산수학	2014	2015	2016
인접행렬, 근접행렬			
채색수(chromatic number)			
평면그래프		전공B, #4, 5점	
이항정리, 조합			
점화식			
생성함수	전공A, 서술형 #6, 3점		전공B, #2, 4점
計	1	1	1

이산수학	2017	2018	2019
인접행렬, 근접행렬	전공A, #2, 2점		
채색수(chromatic number)			
평면그래프			
이항정리, 조합			전공A, #8, 2점
점화식		전공A, #8, 2점	
생성함수			
計	1	1	1

이산수학	2020		
인접행렬, 근접행렬			
채색수(chromatic number)			
평면그래프			
이항정리, 조합			
점화식			
생성함수	전공A, #8, 4점 (확통, 기댓값)		
計	1		

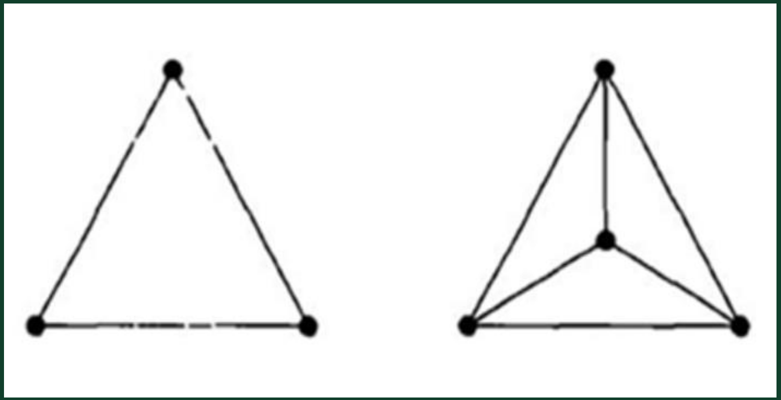
그래프에서 점 V와 연결된 변의 수를 V 의 **차수(degree)**라고 하며 $deg(V)$ 로 표기한다.
오른쪽 그림에서

$$deg(A) = 1,\ deg(B) = 3,\ deg(C) = 0$$



특별한 그래프로써 n 개의 점으로 이루어진 **완전 그래프(complete graph)**라는 것이 있다.
이 그래프는 모든 점들이 다른 모든 점들과 변으로 이어지는 그래프를 말한다.

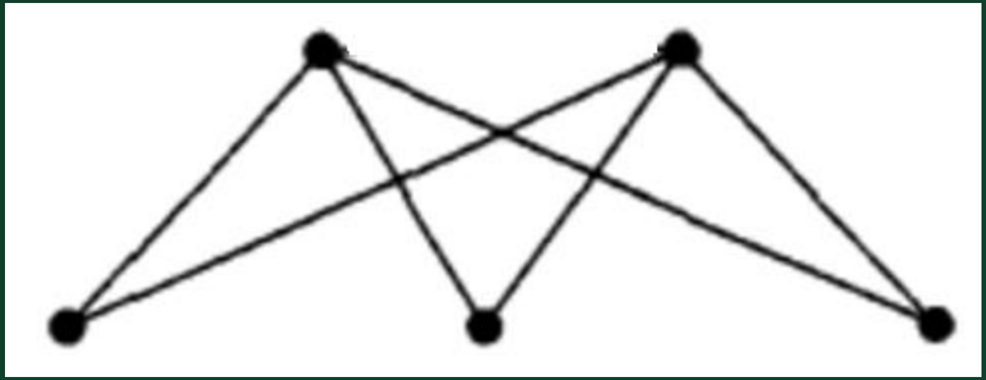
이러한 그래프를 K_n 으로 표기하며 K_3, K_4의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.



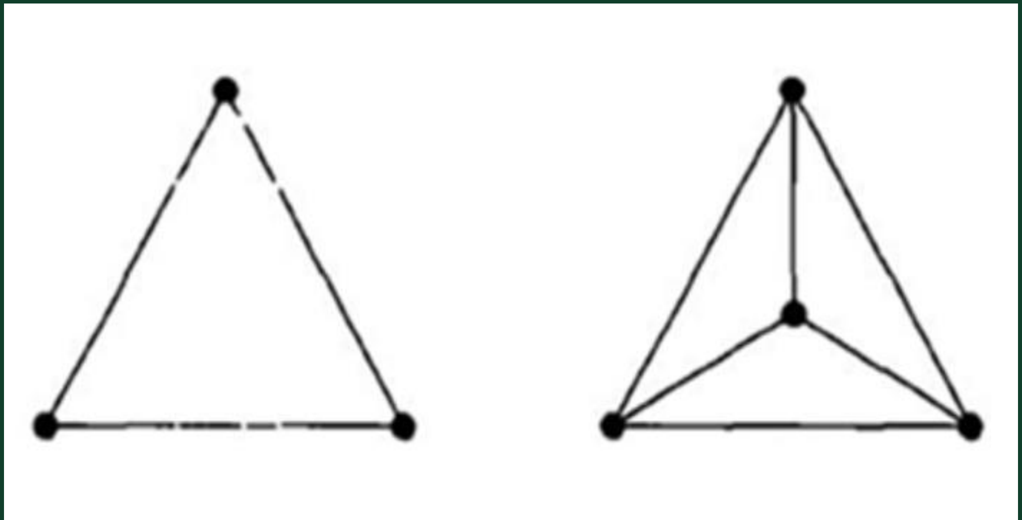
또 다른 특별한 그래프는 **이분그래프(bipartite graph)**이다.
이분그래프는 공집합이 아닌 두 개의 서로 소(disjoint)인 집합 A, B에 속하는 각각의 어떤 점도 인접하지 않는 그래프이다.

특히, A, B에 속하는 각각의 점의 개수가 m, n 이고 A에 속하는 모든 점이 B에 속하는 모든 점과 인접할 때 **완전이분그래프 (complete bipartite graph)**라 하고 $K_{m,n}$ 으로 표기한다.

예를 들어, 완전이분그래프 $K_{2,3}$ 는



K_3 와 K_4 의 그래프에서 점의
차수를 모두 더한 값은 각각
$2 + 2 + 2 = 6,$
$3 + 3 + 3 + 3 = 12$



변의 수를 모두 더한 값은 각각
$3,\ 6$

특히, 점의 차수를 모두 더한 값은 변의 수를 모두 더한 값의
두 배임을 알 수 있다.

실제로, 각 변은 두 점으로 연결되므로
점의 차수들의 합은 변들의 수의 두 배이다.

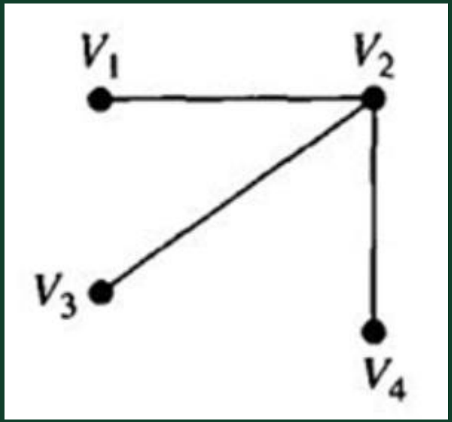
*그래프에서 점들의 차수를 모두 합한 값은
전체 변의 수의 두 배와 같다.

n 개의 점 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 으로 이루어진 그래프를 G 라 하자.
G 를 행렬로 나타내기 위해 점 V_i, V_j 사이에 변이 존재하면 (i, j) 성분이 1,
변이 존재하지 않으면 (i, j) 성분이 0 인 $n \times n$ 행렬을 형성한다.

이러한 행렬을 G 의 **인접 행렬(adjacency matrix)**이라고 한다.

예를 들어, 오른쪽 그래프 G 의 인접 행렬 $A(G)$ 는

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$A(G)$ 의 1 행 모든 성분들의 합은 1 이며, 이 값은 V_1 의 차수와 같다.
2행 모든 성분들의 합은 3 이며, 이 값은 V_2 의 차수와 같다.

*그래프의 인접 행렬에서 i 행의 모든 성분들의 합은
그래프에서 점 V_i 의 차수이다.

YSJ

자신과 연결된 변(edge)이 존재하지 않고 두 점 사이에 하나 이상의 변이 존재하지 않는 그래프를 **단순 그래프(simple graph)**라고 한다.

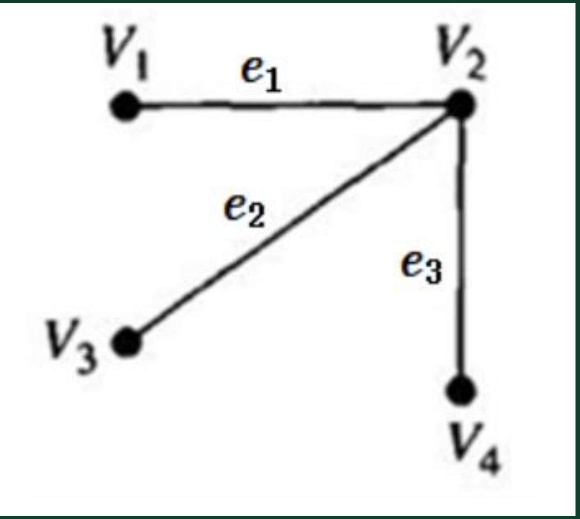
*단순 그래프의 인접행렬은 대각 성분이 모두 $\mathbf{0}$ 이고 이 인접행렬의 $\boldsymbol{k}$ 거듭제곱의 성분은 한 점에서 다른 점으로 이어진 변의 개수가 $\boldsymbol{k}$ 인 경로의 개수를 나타낸다.

특히, 인접행렬의 거듭제곱의 대각 성분의 합은 그래프의 차수와 같다.

인접행렬과 달리 점과 변으로 이루어진 행렬을
결합행렬(incidence matrix)이라고 한다.

예를 들어, 오른쪽 그래프의 결합행렬은

$$\begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



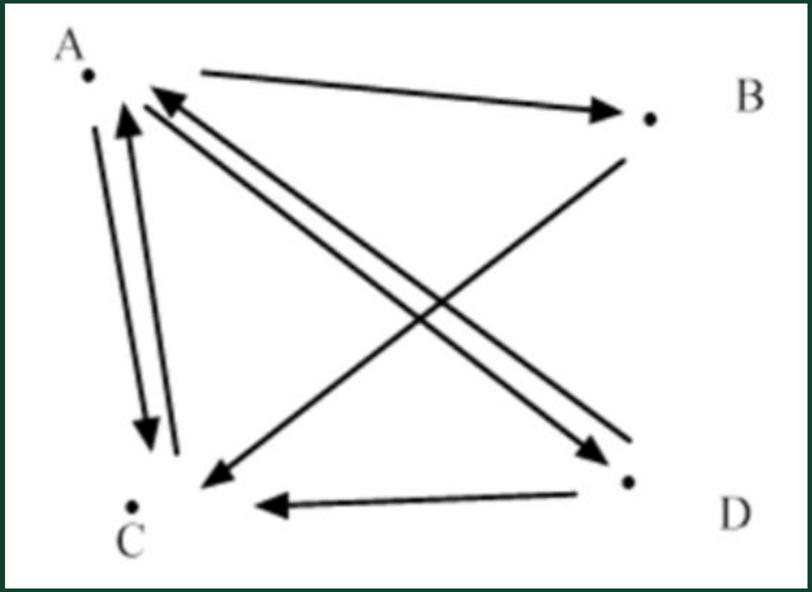
특히, 결합행렬 B 와 그 전치행렬 B^T의 곱 BB^T의 대각 성분은
점의 차수를 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2003학년도, #5-1, #5-2)

다음 그래프는 어느 도시의 A, B, C, D 네 지점 사이에서 자동차로 곧바로 갈 수 있는 경우를 화살표로 나타내고 있다. 예를 들면, A 지점에서 B 지점으로 향하는 화살표는 A 지점에서 B 지점으로 자동차로 곧바로 갈 수 있지만 B 지점에서 A 지점으로는 곧바로 갈 수 없음을 나타낸다.

다음 물음에 답하시오. (총5점)

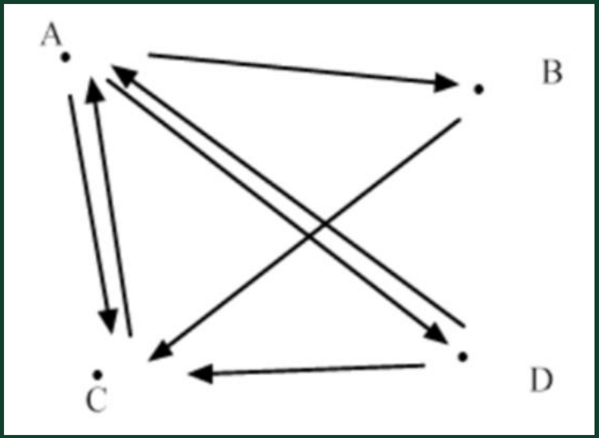


(1) 주어진 그래프를 인접행렬(adjacent matrix)로 나타내시오. (2점)

(2) 어떤 지점에서 다른 지점으로 갈 때, '곧 바로 또는 한 지점을 거쳐서' 갈 수 있는지 없는지를 알 수 있는 행렬을 구하시오.
(단, (1)에서 구한 인접행렬을 이용하시오.) (3점)

[풀이]

(1)
$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



(2) 인접행렬의 거듭제곱의 성분은 한 지점을 거치는 경로의 수를 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

따라서, 곧 바로 또는 한 지점을 거쳐서 갈 수 있는지 알 수 있는 행렬은

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \square$$

확률 및 통계
(단원별 기출문제)

Practice makes perfect

2002학년도부터 2020학년도까지 7개 단원 33문항 출제

- 조건부 확률(2)
- 확률변수(2)
- 기댓값(5)
- 결합pmf, 결합pdf(11)
- 이항분포(2)
- 정규분포(5)
- 확률표본(6)

확률 및 통계	2002	2003	2004
조건부 확률		#9, 5점	
확률변수			
기댓값			
결합pmf, 결합pdf	#13, 5점		
이항분포			
정규분포			
확률표본			#14, 5점
計	1	1	1

확률 및 통계	2005	2006	2007
조건부 확률			
확률변수			
기댓값	#9, 3점		
결합pmf, 결합pdf			
이항분포			#17, 4점
정규분포		#19, 4점	
확률표본			
計	1	1	1

확률 및 통계	2008	2009	2010
조건부 확률			
확률변수			
기댓값	#19, 4점		전공1차, #39
결합pmf, 결합pdf		전공1차, #31	
이항분포			
정규분포		전공1차, #32	
확률표본			전공1차, #40
計	1	2	2

확률 및 통계	2011	2012	2013
조건부 확률		전공1차, #36	
확률변수			전공1차, #35
기댓값	전공1차, #37, 1.5점		전공1차, #36
결합pmf, 결합pdf	전공1차, #38, 2.5점	전공1차, #37	
이항분포			
정규분포			
확률표본		전공1차, #38	전공1차, #37
計	2	3	3

확률 및 통계	2014	2015	2016
조건부 확률			
확률변수			
기댓값			
결합pmf, 결합pdf	전공A, 서술형 #5, 3점	전공A, #6, 2점	전공A, #8, 2점
이항분포			전공A, #7, 2점
정규분포	전공A, #15, 2점	전공A, #5, 2점	
확률표본			
計	2	2	2

확률 및 통계	2017	2018	2019
조건부 확률			
확률변수			
기댓값			
결합pmf, 결합pdf	전공A, #7, 2점 전공A, #14, 4점	전공A, #7, 2점	전공A, #7, 2점
이항분포			
정규분포		전공B, #2, 4점	
확률표본			전공B, #2, 4점
計	2	2	2

확률 및 통계	2020		
조건부 확률			
확률변수	전공B, #7, 4점		
기댓값	전공A, #8, 4점 (이산, 생성함수)		
결합pmf, 결합pdf			
이항분포			
정규분포			
확률표본			
計	2		

S 를 표본 공간이라 하고 B 를 사건 C 들의 집합이라고 하자.
또한, P 를 B 에서 정의된 실함수라고 하자. P 가 다음 세 가지 조건을 만족할 때 P 를 **확률 집합 함수(probability set function)**라고 한다.

(i) 모든 $C \in B$에 대하여

$$P(C) \geq 0$$

(ii) $P(S) = 1$

(iii) 모든 $C_i \in B$ 에 대하여 $C_i \cap C_j = \emptyset$ $(i \neq j)$일 때,

$$P(C_1 \cup C_2 \cup \cdots) = P(C_1) + P(C_2) + \cdots$$

특히, $C_i \cap C_j = \emptyset$ $(i \neq j)$인 C_i, C_j를
배반사건(exclusive event)이라고 한다.

*$P(C^c) = 1 - P(C)$, $P(\emptyset) = 0$, $0 \leq P(C) \leq 1$

*C_1, C_2 에 대하여 $C_1 \subset C_2$ 이면

$$P(C_1) \leq P(C_2)$$

***포함-배제 공식(inclusion-exclusion formula)**

$$P(C_1 \cup \cdots \cup C_k) = P(C_1) + \cdots + P(C_k) - [P(C_1 \cap C_2) + \cdots + P(C_{k-1} \cap C_k)] + \cdots + (-1)^{k+1}\mathrm{P}(C_1 \cap \cdots \cap C_k)$$

표본 공간 S의 부분 집합을 C, C_j라 하자. 새로운 표본 공간 C에 대하여 C_j의 확률을 $P(C_j|C)$ 로 표기하고 다음과 같이 정의한다.

$$P(C_j|C) = \frac{P(C_j \cap C)}{P(C)}$$

$P(C_j|C)$를 C가 주어졌을 때 사건 C_j의

조건부 확률(conditional probability)이라고 한다.

$P(B|A) = P(B)$ $(P(A) > 0)$ 일 때 사건 A, B 는 확률적으로 **독립(independent)**이라고 한다.

따라서, 두 사건 A, B 가 독립이기 위한 필요 충분 조건은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$C_1, \cdots, C_k$ 를 $P(C_i) > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ 인 서로 배반사건이라고 하고 C 를 $P(C) > 0$ 인 사건이라고 두자. 그러면,

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C \cap S) = \mathrm{P}(C \cap (C_1 \cup \cdots \cup C_k))(\because C_1, \cdots, C_k \text{는 서로 배반사건}) \\ &= P\big((C \cap C_1) \cup \cdots \cup (C \cap C_k)\big) = P(C \cap C_1) + \cdots + P(C \cap C_k) \\ &\qquad\qquad (\because (C \cap C_i) \cap (C \cap C_j) = \emptyset) \\ &= P(C_1)P(C|C_1) + \cdots + P(C_k)P(C|C_k)(\because \text{조건부 확률의 정의}) \end{aligned}$$

***Bayes 정리**

$$P(C_j|C) = \frac{P(C_j \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C_j)P(C|C_j)}{P(C_1)P(C|C_1) + \cdots + P(C_k)P(C|C_k)}$$

(2003학년도, #9)
어떤 회사에서는 세 대의 기계 a, b, c 로 같은 종류의 빵을 만들고 있다. 세 대의 기계는 각각 총생산량의 20% , 30% , 50% 를 생산하고 있으며, 생산품의 불량률은 각각 0.5% ,1% ,2% 이다. 생산된 빵을 임의로 한 개 택하여 검사했을 때, 그것이 불량품이었다고 하자. 이 불량품이 기계 a 또는 b 에서 생산되었을 확률을 구하시오. (5점)

[풀이]

세 대의 기계 a, b, c 로 같은 종류의 빵을 생산하는 사건을 각각 A, B, C 로 두고 생산된 빵을 임의로 한 개 택하여 검사했을 때, 그것이 불량품일 사건을 E 라고 하자.
그러면, Bayes 의 정리에 의해

$$P((A \cup B)|E) = \frac{P((A\cup B)\cap E)}{P(E)} = \frac{P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)}{P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)+P(C)P(E|C)}$$

$$= \frac{\frac{2}{10}\times\frac{0.5}{100}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{100}}{\frac{2}{10}\times\frac{0.5}{100}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{100}+\frac{5}{10}\times\frac{2}{100}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \quad \square$$